Material Teórico - Módulo: Funções - Noções Básicas

Resolução de Exercícios - Parte 4

Nono Ano - Fundamental

Autor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

15 de Junho de 2025

Portal da Matemática
OBMEP

Este material completa a discussão de exercícios envolvendo as propriedades básicas de funções. Nosso foco, aqui, é a discussão de exemplos envolvendo a composição e a inversão de funções.

1 Composição de funções

Quando definimos a inversa $g : B \to A$ de uma bijeção $f : A \to B$, mostramos que $g \circ f = \mathrm{Id}_A$ e $f \circ g = \mathrm{Id}_B$. O exemplo a seguir mostra que as únicas funções que $f : A \to B$ para as quais existe uma função $g : B \to A$ satisfazendo as composições acima são as bijeções.

Exemplo 1. *A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é tal que $f(x^3+2) = 2x-5$.*

(a) *Calcule $f(1730)$.*

(b) *Encontre uma fórmula para $f(x)$ em termos de x.*

Solução.
(a) Se encontrarmos $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^3 + 2 = 1730$, teremos $f(1730) = f(x^3 + 2) = 2x - 5$. Ora, $x^3 + 2 = 1730$ equivale a $x^3 = 1728$, logo, a $x = 12$. Portanto,

$$f(1730) = f(12^3 + 2) = 2 \cdot 12 - 5 = 19.$$

(b) Fazendo $x^3 + 2 = y$, temos $x = \sqrt[3]{y-2}$. Portanto,

$$f(y) = f(x^3 + 2) = 2x - 5 = 2\sqrt[3]{y-2} - 5,$$

para todo $y \in \mathbb{R}$. □

Exemplo 2. *Seja $f : A \to B$ uma função dada. Se existir uma função $g : B \to A$ tal que $g \circ f = \mathrm{Id}_A$ e $f \circ g = \mathrm{Id}_B$, prove que f e g são bijeções.*

Solução. Para mostrar que f é injetiva, tome $a, a' \in A$ e suponhamos que $f(a) = f(a')$. Então, $g(f(a)) = g(f(a'))$ ou, o que é o mesmo, $(g \circ f)(a) = (g \circ f)(a')$. Como estamos supondo que $g \circ f = \mathrm{Id}_A$, concluímos que $\mathrm{Id}_A(a) =$

$\mathrm{Id}_A(a')$ ou, ainda, $a = a'$. Assim, em resumo, mostramos que $f(a) = f(a')$ implica $a = a'$; como vimos na parte 2 do material teórico referente à vídeo-aula "*Noções Básicas*", deste módulo, isso garante que f é injetiva.

Para mostrar que f é sobrejetiva, dado $b \in B$, temos de garantir que existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Ora, uma vez que $f \circ g = \mathrm{Id}_B$, calculando ambos os membros dessa igualdade em b, obtemos $(f \circ g)(b) = \mathrm{Id}_B(b)$, logo, $f(g(b)) = b$. Então, fazendo $a = g(b)$, concluímos que $f(a) = b$, o que garante a sobrejetividade de f.

Por fim, para mostrar que g é injetiva e sobrejetiva, é suficiente raciocinar como fizemos acima, trocando os papéis de f e g ao longo de toda a discussão. □

Exemplo 3. *Seja $f : A \to A$ uma função tal que $f(f(f(x))) = x$, para todo $x \in A$. Prove que f é bijetiva.*

Solução. A condição dada no enunciado equivale a termos $f \circ f \circ f = \mathrm{Id}_A$.

Denotando $g = f \circ f$, temos

$$f \circ g = f \circ (f \circ f) = f \circ f \circ f = \mathrm{Id}_A$$

e

$$g \circ f = (f \circ f) \circ f = f \circ f \circ f = \mathrm{Id}_A\,.$$

Como $f \circ g = \mathrm{Id}_A$, o exemplo anterior (com $A = B$) garante que f é sobrejetiva. Como $g \circ f = \mathrm{Id}_A$, o exemplo anterior (novamente com $A = B$) garante que f é injetiva. □

Exemplo 4. *Faça os dois itens a seguir:*

(a) *Exiba uma função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tal que $f(f(n)) = n + 2$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.*

(b) *Mostre que não existe uma função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tal que $f(f(n)) = n + 1$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.*

Solução.

(a) Procurando $f(n) = an + b$, com a e b inteiros a determinar, temos

$$\begin{aligned} f(f(n)) &= af(n) + b \\ &= a(an + b) + b \\ &= a^2n + ab + b \\ &= a^2n + (a + 1)b. \end{aligned}$$

Assim, $f(f(n)) = n + 2$ equivale a

$$a^2n + (a + 1)b = n + 2$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$, de sorte que $a^2 = 1$ e $(a + 1)b = 2$. Então, a primeira equação dá $a = \pm 1$, enquanto a segunda garante que $a + 1 \neq 0$; portanto, a única possibilidade (se $f(n) = an + b$ para todo $n \in \mathbb{Z}$) é $a = b = 1$, dando $f(x) = x + 1$.

(b) Suponha que existisse uma função f como no enunciado. Então, tomando $n \in \mathbb{Z}$ e fazendo $m = f(n)$, devemos ter

$$f(f(f(n))) = f(f(m)) = m + 1 = f(n) + 1.$$

Mas, uma vez que $f(f(f(n))) = f(n + 1)$, segue que

$$f(n + 1) = f(n) + 1, \ \forall \ n \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Afirmamos que, graças à última relação acima, deve ser

$$f(k) = k + f(0), \ \forall \ k \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

Realmente, essa relação é óbvia para $k = 0$ e $x = 1$. Para $k > 1$, somando membro a membro as relações

$$\begin{array}{rcl} f(k) & = & f(k-1) + 1 \\ f(k-1) & = & f(k-2) + 1 \\ f(k-2) & = & f(k-3) + 1 \\ \cdots & & \cdots \\ f(2) & = & f(1) + 1 \\ f(1) & = & f(0) + 1, \end{array}$$

segue que

$$f(k)+f(k-1)+f(k-2)+\ldots+f(2)+f(1)=$$
$$=f(k-1)+f(k-2)+\ldots+f(2)+f(1)+f(0)+k;$$

cancelando a soma $f(k-1)+f(k-2)+\ldots+f(2)+f(1)$ de ambos os membros da igualdade acima, ficamos com $f(k)=k+f(0)$. O caso $k<0$ pode ser analisado de forma análoga, a partir de (1).

Agora, aplicando (2) duas vezes, obtemos

$$\begin{aligned} f(\underbrace{f(n)}_{k}) &= f(k)=k+f(0)=f(n)+f(0) \\ &= (n+f(0))+f(0)=n+2f(0). \end{aligned}$$

Então, para que seja $f(f(n))=n+1$, devemos ter

$$n+2f(0)=n+1,$$

logo, $f(0)=\frac{1}{2}$. Mas isso é impossível, uma vez que queremos que f assuma valores inteiros.

Portanto, não pode existir uma função $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ satisfazendo a relação dada no item (b). $\square$

Ainda em relação ao item (b) do exemplo anterior, observe que, procurando f da forma $f(n)=an+b$, teríamos, como lá, $f(f(n))=a^2n+(a+1)b$. Então, para que fosse $f(f(n))=n+1$ para todo $n\in\mathbb{Z}$, deveríamos ter $a^2n+(a+1)b=n+1$ para todo $n\in\mathbb{Z}$, logo, $a^2=1$ e $(a+1)b=1$. Como na solução do item (a) do exemplo anterior, isso daria $a=1$ e $b=1/2$.

Perceba, contudo, que a função de domínio $\mathbb{Z}$ e definida para $n\in\mathbb{Z}$ por $f(n)=n+\frac{1}{2}$ nem sempre assume valores inteiros, de forma que *não é* uma solução para o item (b).

Também, o fato de que essa função não assume valores inteiros *não é* uma prova de que não existe função $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ satisfazendo a condição do item (b). O que o argumento acima mostrou foi tão somente que não existe função $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ satisfazendo a condição do item (b) e tendo a forma $f(n)=an+b$, para todo $n\in\mathbb{Z}$.

Assim, em princípio poderia existir outra função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ satisfazendo a condição do item (b), o que justifica a necessidade de uma argumentação mais elaborada, como a que apresentamos na solução daquele item, para garantir que uma tal função, de fato, não existe.

Mais geralmente, dado $k \in \mathbb{Z}$, é possível provar que:

(1) Se k for para, então sempre existe uma função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tal que $f(f(n)) = n + k$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

(2) Se k for ímpar, então não existe uma função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tal que $f(f(n)) = n + k$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

No item (2) acima, o caso $k = 1987$ foi o problema 4 da Olimpíada Internacional de Matemática de 1987. A esse respeito, veja a referência [4].

2 Inversão de funções

Exemplo 5. *Seja a e b números reais dados. Qual é a condição para que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = ax + b$, seja invertível? Nesse caso, exiba a inversa de f.*

Solução. Suponha que exista uma inversa $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ para a função f. Sabemos que $f(g(x)) = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$, ou seja, que

$$ag(x) + b = x, \ \forall \ x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Analisemos dois casos separadamente:

i. Se $a \neq 0$, então podemos resolver (3) para $g(x)$, obtendo $g(x) = \frac{x-b}{a}$.

ii. Se $a = 0$, então a função f é constante, com $f(x) = b$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto, nesse caso, f não é bijetiva, logo, não tem inversa.

Assim, a condição para que f tenha inversa é que seja $a \neq 0$. Sendo esse o caso, vimos acima que a inversa de f é a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por

$$g(x) = \frac{x-b}{a} = \frac{1}{a} \cdot x - \frac{b}{a}.$$

$\square$

Exemplo 6. *Seja $\mathbb{R}_+$ o conjunto dos números reais não negativos. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, dada por $f(x) = x^2$, é sobrejetiva, mas não é bijetiva, uma vez que $f(a) = a^2 = (-a)^2 = f(-a)$, para todo $a \in \mathbb{R}$. Mostre que existem duas funções diferentes $g, h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ tais que $f \circ g = f \circ h = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_+}$.*

Solução. Consideremos as funções $g, h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ dadas por $g(x) = \sqrt{x}$ e $h(x) = -\sqrt{x}$, para $x \geq 0$. Temos

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (g(x))^2 = (\sqrt{x})^2 = x$$

e

$$(f \circ h)(x) = f(h(x)) = (h(x))^2 = (-\sqrt{x})^2 = x,$$

para todo $x \in \mathbb{R}_+$. Assim, $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_+}$ e $f \circ h = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_+}$, conforme desejado. $\square$

Nas notações do enunciado do exemplo anterior, dizemos que g e h são *inversas à direita* da função f. Note, contudo, que, nesse caso, como f não é uma bijeção, f não tem inversa (bilateral).

Exemplo 7. *Dizemos que uma função $f : A \to A$ é uma* involução *se $f \circ f = I_A$, ou seja, se f for igual à sua inversa. A função identidade* $\mathrm{Id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *dada por* $\mathrm{Id}(x) = x$ *para todo $x \in A$, é uma involução. Existe alguma outra involução $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?*

Solução. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = -x$, é uma involução, pois

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = -f(x) = -(-x) = x,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. $\square$

Ainda em relação ao exemplo anterior, se o conjunto A tiver pelo menos dois elementos então sempre há involuções $f : A \to A$ diferentes de Id_A. Realmente, basta tomarmos elementos distintos $a, a' \in A$ e definir $f : A \to A$ pondo

$$f(x) = \begin{cases} a', \text{ se } x = a \\ a, \text{ se } x = a' \\ x, \text{ se } x \neq a, a' \end{cases}.$$

Então,

$$(f \circ f)(a) = f(f(a)) = f(a') = a,$$
$$(f \circ f)(a') = f(f(a')) = f(a) = a'$$

e, para $x \in A \setminus \{a, a'\}$,

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x) = x.$$

Assim, $f \neq \mathrm{Id}_A$ e $f \circ f = \mathrm{Id}_A$.

Vejamos mais um exemplo relacionado a involuções.

Exemplo 8. *Faça os dois itens a seguir:*

(a) *Sejam a, b, c, d números reais tais que $c, ad - bc \neq 0$. Mostre que a fórmula $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ define uma bijeção de $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ em $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\}$.*

(b) *Mostre que existem infinitas escolhas de números reais a, b, c, d satisfazendo as condições do item (a) e tais que a função $f : \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\} \to \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\}$ dada por $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ seja uma involução.*

Solução.

(a) Para $x, x' \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$, temos que

$$\begin{aligned} f(x) = f(x') &\Rightarrow \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{ax'+b}{cx'+d} \\ &\Rightarrow (ax+b)(cx'+d) = (cx+d)(ax'+b) \\ &\Rightarrow \cancel{acxx'} + adx + bcx' + \cancel{bd} = \\ &\quad = \cancel{acxx'} + bcx + adx' + \cancel{bd} \\ &\Rightarrow adx - bcx = adx' - bcx' \\ &\Rightarrow (\cancel{ad - bc})x = (\cancel{ad - bc})x' \\ &\Rightarrow x = x'; \end{aligned}$$

portanto, f é injetiva.

Para mostrarmos que f é sobrejetiva, dado $y \in \setminus \left\{ \frac{a}{c} \right\}$, queremos $x \in \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$ tal que $f(x) = y$. Ora, começando com $y \in \setminus \left\{ \frac{a}{c} \right\}$ e procurando os $x \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = y$, temos

$$\begin{aligned} f(x) = y &\Leftrightarrow \frac{ax+b}{cx+d} = y \\ &\Leftrightarrow ax + b = (cx+d)y \\ &\Leftrightarrow ax + b = cxy + dy \\ &\Leftrightarrow (-cy+a)x = dy - b \\ &\Leftrightarrow x = \frac{dy-b}{-cy+a}. \end{aligned}$$

Resta mostrar que esse valor de x é diferente de $-\frac{d}{c}$ (pois, do contrário, não haveria sentido em calcular $f(x)$, uma vez que $x = -\frac{d}{c} \Rightarrow cx + d = 0$). Mas isso é imediato:

$$\begin{aligned} \frac{dy-b}{-cy+a} = -\frac{d}{c} &\Rightarrow c(dy-b) = -d(-cy+a) \\ &\Rightarrow \cancel{cdy} - bc = \cancel{cdy} - ad \\ &\Rightarrow ad - bc = 0, \end{aligned}$$

o que não é o caso.

(b) Seja $f : \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\} \to \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{a}{c} \right\}$ dada por $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$.

Como f deve ser uma involução, queremos que $f(f(x)) = x$, para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{a}{c} \right\}$ (o domínio de f) tal que $f(x) \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{a}{c} \right\}$.

Inicialmente, calculamos

$$\begin{aligned} f(f(x)) = \frac{af(x)+b}{cf(x)+d} &= \frac{a\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)+b}{c\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)+d} \\ &= \frac{a(ax+b)+b(cx+d)}{c(ax+b)+d(cx+d)} \\ &= \frac{(a^2+bc)x+(a+d)b}{c(a+d)x+(bc+d^2)}. \end{aligned}$$

Em seguida, observamos que, para que a última expressão acima seja sempre igual a x, uma tentativa óbvia é impor que $a+d=0$, $a^2+bc\neq 0$ e $\frac{a^2+bc}{bc+d^2}=1$. De fato, basta que sejam $a+d=0$ e $a^2+bc\neq 0$, uma vez que, com $d=-a$, tem-se

$$\frac{a^2+bc}{bc+d^2}=\frac{a^2+bc}{bc+(-a)^2}=1.$$

Assim, sendo $f(x)=\frac{ax+b}{cx-a}$, temos que f é uma bijeção de $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{a}{c}\right\}\to\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{a}{c}\right\}$. Em particular, nesse caso tem-se sempre $f(x)\neq\frac{a}{c}$, como era necessário para podermos calcular $f(f(x))$. $\square$

Exemplo 9. *Mostre que a regra $f(x)=\sqrt{x^2-x+1}$ define uma bijeção de $[\frac{1}{2},+\infty)$ em $[\frac{\sqrt{3}}{2},+\infty)$. Em seguida, calcule sua inversa.*

Solução. Primeiramente, completando quadrados, veja que

$$x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geq\frac{3}{4},$$

de forma que tem sentido extrairmos a raiz quadrada para definir $f(x)$.

Agora, para $x_1,x_2\geq\frac{1}{2}$, temos que

$$\begin{aligned}f(x_1)=f(x_2)&\Rightarrow\sqrt{x_1^2-x_1+1}=\sqrt{x_2^2-x_2+1}\\&\Rightarrow x_1^2-x_1+\cancel{1}=x_2^2-x_2+\cancel{1}\\&\Rightarrow(x_1^2-x_2^2)-(x_1-x_2)=0\\&\Rightarrow(x_1-x_2)(x_1+x_2-1)=0\\&\Rightarrow x_1=x_2\text{ ou }x_1+x_2=1.\end{aligned}$$

Se $x_1+x_2=1$, então, como $x_1,x_2\geq\frac{1}{2}$, teremos $x_1=x_2=\frac{1}{2}$. Assim, em qualquer caso, concluímos que $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$, e f é injetiva.

Para a sobrejetividade de f, dado $y\geq\frac{\sqrt{3}}{2}$, queremos mostrar que existe $x\geq\frac{1}{2}$ tal que $f(x)=y$. Ora,

$$\begin{aligned}
f(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x + 1} = y \\
&\Leftrightarrow x^2 - x + 1 = y^2 \\
&\Leftrightarrow x^2 - x + (1 - y^2) = 0 \\
&\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(1 - y^2)}}{2} \\
&\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{4y^2 - 3}}{2}.
\end{aligned}$$

Agora, veja que a condição $y \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ garante que $4y^2 - 3 \geq 0$, logo, que $\sqrt{4y^2 - 3}$ tem sentido nos reais. Como queremos que $x \geq \frac{1}{2}$, a única possibilidade é que seja $x = \frac{1+\sqrt{4y^2-3}}{2}$.

Os cálculos acima mostraram que

$$f(x) = y \Leftrightarrow x = \frac{1 + \sqrt{4y^2 - 3}}{2}.$$

Como $f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$, segue que a função $f^{-1} : [\frac{\sqrt{3}}{2}, +\infty) \to [\frac{1}{2}, +\infty)$ é dada por

$$f^{-1}(y) = \frac{1 + \sqrt{4y^2 - 3}}{2}.$$

□

Dicas para o Professor

Três ou quatro encontros de 50 minutos cada são suficientes para cobrir o material desta aula, a depender do nível de maturidade da turma. (Caso você queira se deter um pouco mais em alguns exemplos, precisará de um pouco mais de tempo.)

As referências abaixo contém muitos problemas adicionais sobre funções, de variados graus de dificuldade.

Sugestões de Leitura Complementar

1. E. L. Lima et al. *A Matemática do Ensino Médio*, vol. 3. Coleção do Professor de Matemática, Editora S.B.M., Rio de Janeiro, 1998.
2. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar*, vol. 3. Coleção do Professor de Matemática, Editora S.B.M., Rio de Janeiro, 2013.
3. G. Iezzi. *Os Fundamentos da Matemática Elementar*, vol. 1. Atual Editora, São Paulo, 2013.
4. Olimpíada Internacional de Matemática de 1987, em `https://www.imo-official.org/problems.aspx`