Material Teórico - Módulo Resolução de Exercícios

Exercícios Variados

Sexto Ano

Autor: Ulisses Lima Parente
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

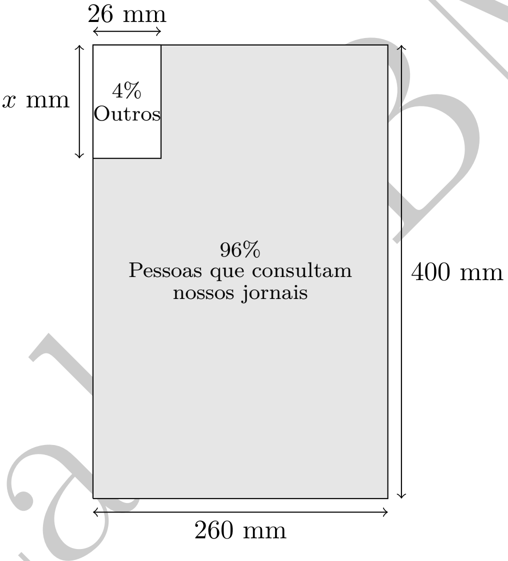
29 de setembro de 2020

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Exercicícios variados

Neste material, apresentaremos uma miscelânea de exercícios que envolvem conteúdos variados. Dentre os temas explorados nesses exercícios, podemos citar: áreas de figuras planas, porcentagem, divisibilidade de inteiros e unidades de medida comprimento, tempo e volume.

Exemplo 1 (ENEM - 2010). *O jornal de certa cidade publicou em uma página inteira, a seguinte propaganda de seu caderno de classificados:*



Para que a propaganda seja fiel à porcentagem da área que aparece na divulgação, a medida do lado do retângulo que representa os 4%, deve ser de, aproximadamente:

(*a*) 1 *mm.*

(*b*) 10 *mm.*

(*c*) 17 *mm.*

(*d*) 160 *mm.*

(*e*) 167 *mm.*

Solução. Inicialmente, veja que a área do retângulo, o qual representa 100%, é igual a

$$260 \cdot 400 \text{ mm}^2.$$

Calculando 4% dessa área, obtemos

$$\frac{4}{1\cancel{0}\cancel{0}} \cdot 260 \cdot 4\cancel{0}\cancel{0} = 4160 \text{ mm}^2.$$

Logo, a área do retângulo branco, que deve corresponder a 4% da área do retângulo maior, é igual a 4160 mm^2. Portanto,

$$26x = 4160 \Rightarrow x = \frac{4160}{26} = 160\text{mm}.$$

A alternativa correta é a letra **(d)**. □

Exemplo 2 (Magistério - RJ - 2006 - Adaptada). *Num jogo de futebol, compareceram ao estádio* $52x7y$ *torcedores, em que* x *e* y *são algarismos. Contando esses torcedores de* 8 *em* 8 *ou de* 9 *em* 9*, não sobra torcedor em nenhuma das duas contagens. O valor de* $3x + 2y$ *é:*

(*a*) 35.

(*b*) 12.

(*c*) 10.

(*d*) 8.

Solução. Como não há sobra quando os torcedores são contados de 8 em 8 ou de 9 em 9, o número $52x7y$ deve ser um múltiplo comum a 8 e 9.

Um número natural é múltiplo de 9 se, e somente se, a soma dos seus algarismos é um múltiplo de 9; assim,

$$5 + 2 + x + 7 + y = 14 + x + y$$

é um múltiplo de 9. Por outro lado, como x e y são algarismos, a soma $14+x+y$ vale no mínimo $14+0+0=14$ e no máximo $14+9+9=32$. Assim, $14+x+y$ é um múltiplo de 9 situado de 14 a 32, logo, vale 18 ou 24. Segue que:

$$x+y=4 \text{ ou } x+y=13.$$

Por outro lado, $52x7y$ também deve ser múltiplo de 8, ou seja, o número formado pelos três últimos algarismos desse número também deve ser múltiplo de 8. Assim, o número $x7y$ deve ser múltiplo de 8. Em particular, y deve ser um algarismo par. Para que $x+y=4$, as opções são $y=0$ e $x=4$, $y=2$ e $x=2$ ou $y=4$ e $x=0$. Agora, veja que:

- $y=0$ e $x=4$ implicam $x7y=470$, que não é um múltiplo de 8.
- $y=2$ e $x=2$ implicam $x7y=272$, que é um múltiplo de 8.
- $y=4$ e $x=0$ implicam $x7y=074$, que não é um múltiplo de 8.

Portanto, a única possibilidade é $y=2$ e $x=2$, a qual dá

$$3x+2y=3\cdot 2+2\cdot 2=10.$$

Logo, a alternativa correta é a letra **(c)**. $\square$

Exemplo 3 (OCM - Adaptada). *Um número é chamado palíndromo se, ao invertermos a ordem de seus algarismos, obtivermos exatamente o mesmo número. Por exemplo,* 12421 *e* 2442 *são palíndromos. Existem números primos que são palíndromos e têm três algarismos, por exemplo* 181 *e* 919*. Existem, também, números primos que são palíndromos e têm cinco algarismos, por exemplo* 79997 *e* 98689*. Quantos números primos são palíndromos e têm uma quantidade par de algarismos?*

(a) *nenhum.*

(b) 1*.*

(*c*) 2.

(*d*) 10.

(*e*) *infinitos.*

Solução. Em qualquer palíndromo que possui uma quantidade par de algarismos, a soma dos algarismos das ordens pares é igual à soma dos algarismos das ordens ímpares. Por exemplo, no palíndromo de 6 algarismos 125521, as somas dos algarismos de ordens pares e ímpares vale $1 + 5 + 2 = 8$.

Agora, o critério de divisibilidade por 11 afirma que um número inteiro é múltiplo de 11 se, e somente se, a diferença entre a soma dos algarismos das ordens pares e a soma dos algarismos da ordens ímpares é múltiplo de 11. Uma vez que em nosso caso (de palíndromos que possuem uma quantidade par de algarismos) tais somas são iguais, concluímos que todo palíndromo com uma quantidade par de algarismos é múltiplo de 11 (pois a diferença entre a soma dos algarismos das ordens pares e a soma dos algarismos da ordens ímpares é igual a 0, e 0 é um múltiplo de 11).

Assim, um palíndromo com número par de algarismos, sendo sempre um múltiplo de 11, só será primo somente quando for igual a 11. Dessa forma, há somente um número primo que é palíndromo e possui uma quantidade par de algarimos. Portanto, a alternativa correta é a letra **(b)**. □

Exemplo 4. *O numero* $68a0b$ *é divisível por* 45*. Encontre os possíveis valores dos algarismos* a *e* b*.*

Solução. Para ser divisível por $45 = 5 \cdot 9$, o número tem de ser divisível por 5 e por 9.

Para que $68a0b$ seja divisível por 9, a soma de seus algarismos, que vale $6+8+a+0+b = 14+a+b$, deve ser divisível por 9. Daí, obtemos $14 + a + b = 18$ ou $14 + a + b = 27$, ou seja,

$$a + b = 4 \text{ ou } a + b = 13.$$

Por outro lado, como $68a0b$ também é divisível por 5, devemos ter

$$b = 0 \text{ ou } b = 5.$$

Juntando as informações sobre os valores de a e b, obtemos

$$a = 4, b = 0 \text{ ou } a = 8, b = 5.$$

□

Exemplo 5 (CMF - adaptado). *Considere as seguintes condições a respeito de numerais que possuem 6 algarismos distintos:*

i. Se eliminarmos os algarismos que ocupam a 1ª, 3ª e 5ª ordens, os algarismos do numeral formado estarão em ordem crescente, da esquerda para a direita.

ii. Os algarismos que ocupam a 1ª, 2ª e 3ª ordens formam um numeral maior que o numeral formado pelos algarismos que ocupam as outras três ordens.

iii. Se multiplicarmos o numeral por 2, então o produto é um numeral com o mesmo número de ordens.

iv. Os algarismos que ocupam a 1ª, 3ª e 5ª ordens formam um numeral divisível por 3.

Com base nessas informações, assinale a opção que apresenta corretamente um numeral que satisfaz as condições acima.

(a) 148593.

(b) 203148.

(c) 306985.

(d) 436728.

(e) 516870.

Solução. Para que a condição i. seja satisfeita, o numeral não pode ser o do item (d). Realmente, para o numeral do item (d), eliminando os algarismos que ocupam a 1ª, a 3ª e a 5ª ordens ficamos com o numeral 462; entretanto, os algarismos dele não estão em ordem crescente, da esquerda para a direita. Ficamos, então, com os itens (a), (b), (c) e (e).

A validade da condição ii. elimina a opção (b). De fato, para o numeral do item (b), os algarismos que ocupam a 1ª, 2ª e 3ª ordens formam o numeral 148 e os algarismos que ocupam as outras três ordens formam o numeral 203, mas 148 é menor (e não maior) que 203. Restam os itens (a), (c) e (e).

A condição iii. descarta o numeral da opção (e), pois o numeral $2 \times 516870 = 1231740$ possui sete ordens, ou seja, uma ordem a mais que 516870. Temos, então, de analisar os itens (a) e (c).

Finalmente, a condição iv. elimina a opção (c), pois os algarismos que ocupam a 1ª, 3ª e 5ª ordens formam o numeral 590, que não é múltiplo de 3 (pois $5+9+0 = 14$ não é divisível por 3).

Portanto, resta o numeral do item (a), 148593, e podemos verificar facilmente que ele satisfaz todas as condições dadas no enunciado do problema. Assim, a alternativa correta é a letra **(a)**. □

Exemplo 6 (PUC - RJ - 2012). *Uma máquina demora* 27 *segundos para produzir uma peça. O tempo necessário para produzir* 150 *peças é:*

(a) 1 *hora,* 7 *minutos e* 3 *segundos.*

(b) 1 *hora,* 7 *minutos e* 30 *segundos.*

(c) 1 *hora,* 57 *minutos e* 30 *segundos.*

(d) 1 *hora,* 30 *minutos e* 7 *segundos.*

(e) 1 *hora,* 34 *minutos e* 3 *segundos.*

Solução. Se a máquina demora 27 segundos para produzir uma peça, então o tempo necessário para produzir 150 peças é igual a

$$150 \cdot 27 = 4050 \text{ segundos.}$$

Uma vez que

$$1 \text{ hora} = 3600 \text{ segundos}$$

e

$$\begin{array}{r|l} 4\,0\,5\,0 & 3\,6\,0\,0 \\ \cline{2-2} 4\,5\,0 & 1 \end{array}$$

temos que 4050 segundos é o mesmo que 1 hora mais 450 segundos. Como

$$1 \text{ minuto} = 60 \text{ segundos},$$

e

$$\begin{array}{r|l} 4\,5\,0 & 6\,0 \\ \cline{2-2} 3\,0 & 7 \end{array},$$

temos que 450 segundos é o mesmo que 7 minutos e 30 segundos.

Assim, concluímos que

$$4050 \text{ segundos} = 1 \text{ hora, } 7 \text{ minutos e } 30 \text{ segundos},$$

e a alternativa correta é a letra **(b)**.

□

Exemplo 7 (ENEM - 2011). *O consumo de café no Brasil atingiu o maior nível da história no ano passado: os brasileiros beberam o equivalente a* 331 *bilhões de xícaras (Revista Veja. Ed.* 2158, 31 *mar.* 2010*). Considere que a xícara citada na notícia seja equivalente a, aproximadamente,* 120 *ml de café. Suponha que, em* 2010*, os brasileiros bebam ainda mais café, aumentando o consumo em* $\frac{1}{5}$ *do que foi consumido no ano anterior. De acordo com essas informações, qual a previsão mais aproximada para o consumo de café em* 2010*?*

(*a*) 8 *bilhões de litros.*

(*b*) 16 *bilhões de litros.*

(*c*) 32 *bilhões de litros.*

(*d*) 40 *bilhões de litros.*

(e) 48 *bilhões de litros.*

Solução. Como $120\,\text{ml} = 0{,}12\,\text{l}$, temos que as 331 bilhões de xícaras consumidas em 2009 correspondem a

$$33100000000 \cdot 0{,}12 = 39720000000,$$

ou seja, aproximadamente, 40 bilhões de litros.

Supondo que em 2010 o consumo tenha aumentado 20% (o mesmo que 1/5), quando comparado com 2009, concluímos que a previsão para o consumo de café em 2010 é de, aproximadamente,

$$40 + \frac{2}{10} \cdot 40 = 48$$

bilhões de litros. Logo, a alternativa correta é a letra **(e)**. $\square$

Exemplo 8 (ENEM - 2011). *Em 2010, um caos aéreo afetou o continente europeu, devido à quantidade de fumaça expelida por um vulcão na Islândia, o que levou ao cancelamento de inúmeros voos. Cinco dias após o início desse caos, todo o espaço aéreo europeu acima de 6000 metros estava liberado, com exceção do espaço aéreo da Finlândia. Lá, apenas voos internacionais acima de 31 mil pés estavam liberados* [1]. *Considerando que 1 metro equivale a aproximadamente 3,3 pés, qual a diferença, em pés, entre as altitudes liberadas na Finlândia e no restante do continente europeu cinco dias após o início do caos?*

(a) 3390 *pés.*

(b) 9390 *pés.*

(c) 11200 *pés.*

(d) 19800 *pés.*

(e) 50800 *pés.*

[1] Disponível em: `http://www1.folha.uol.com.br`. Acesso em: 21 abr. 2010 (adaptado).

Solução. Temos que

$$6000 \text{ metros} \cong 6000 \cdot 3{,}3 \text{ pés} = 19800 \text{ pés}.$$

Logo, a diferença entre as altitudes liberadas na Finlândia e no restante do continente europeu, em pés, é igual a

$$31000 - 19800 = 11200.$$

Portanto, a alternativa correta é a letra **(c)**. □

Exemplo 9 (CMF - 2014). *Conforme publicado na revista Época em* 27 *de novembro de* 2006*, no dia* 29 *de setembro daquele mesmo ano houve um choque entre um jato executivo Legacy e o Boeing da empresa aérea Gol que fazia o voo* 1907*, de Manaus para o Rio de Janeiro. No momento do choque, o Boeing da Gol voava a uma altitude de* 37.000 *pés. O jato executivo Legacy tinha um plano de voo que indicava que o seu deslocamento naquela região deveria ocorrer a* 36.000 *pés. (Considere* $1\,pé = 30\,cm$*.) Admitindo que cada andar de um prédio tenha* 3 *metros de altura, a diferença de altitude entre o Boeing da Gol e a prevista pelo plano de voo do jato executivo Legacy é equivalente à altura de um prédio com:*

(*a*) 3 *andares.*

(*b*) 10 *andares.*

(*c*) 30 *andares.*

(*d*) 100 *andares.*

(*e*) 300 *andares.*

Solução. A diferença entre as altitudes do Boeng e do jato Legacy, conforme prevista pelos planos de voo, era de $37000 - 36000 = 1000$ pés. Como 1 pé = 30 cm, temos que

$$1000 \text{ pés} = 1000 \cdot 30 = 30000 \text{ cm} = 300 \text{ m}.$$

Por outro lado,

$$\begin{array}{r|l} 3\,0\,0 & 3 \\ \cline{2-2} 0 & 1\,0\,0 \end{array}$$

Desse modo, a diferença entre as altitudes previstas para os dois aviões corresponde a um prédio de 100 andares. A alternativa correta é a letra **(d)**. □

Exemplo 10. *Em um sítio, há vários cercados para guardar certo número de filhotes de cachorro. Se pusermos* 4 *cachorros em cada cercado, sobrarão* 2 *cachorros; se pusermos* 6 *cachorros em cada cercado,* 2 *cercados ficarão vazios. Quantos cachorros e quantos cercados há?*

Solução. Denotemos por x o número de cercados e por y o número de cachorros. Pondo 4 cachorros em cada cercado, sobrarão 2 cachorros, ou seja, $4x + 2 = y$. Por outro lado, pondo 6 cachorros em cada cercado, 2 cercados ficarão vazios, ou seja, $6(x - 2) = y$. Juntando as duas equações, obtemos

$$\begin{aligned} 6(x-2) = y = 4x + 2 &\iff 6x - 12 = 4x + 2 \\ &\iff 6x - 4x = 2 + 12 \\ &\iff 2x = 14 \\ &\iff x = \frac{14}{2} \\ &\iff x = 7. \end{aligned}$$

Daí, segue que

$$y = 4 \cdot 7 + 2 = 30.$$

Portanto, são 30 cachorros e 7 cercados. □

Exemplo 11. *Três crianças têm idades superiores a* 1 *ano. Sabendo que o produto de suas idades é* 231*, pergunta-se: Quantos anos tem a mais velha?*

Solução. Veja que 231 é um múltiplo de 3, pois tem soma de algarismos $2 + 3 + 1 = 6$, que é um múltiplo de 3. Dividindo 231 por 3, obtemos sua fatoração completa:

$$231 = 3 \cdot 77 = 3 \cdot 7 \cdot 11.$$

Agora, como as três crianças têm idades superiores a 1 ano, a única possibilidade é que suas idades sejam 3, 7 e 11 anos. Portanto, a filha mais velha tem 11 anos de idade. □

Dicas para o Professor

Recomendamos que sejam utilizadas duas sessões de 50min para expor o conteúdo deste material. Sugerimos aos professores que apresentem os exemplos com todos os detalhes e proponham exemplos adicionais aos alunos, sempre dando algum tempo para que eles tentem encontrar as soluções por conta própria.

É recomendável fazer uma pequena revisão sobre os conteúdos abordados, antes de resolver cada problema. Em particular, antes de apresentar os exemplos sobre os critérios de divisibilidade, é bom perguntar aos alunos se eles recordam os critérios, bem como apresentar alguns exemplos numéricos para estimular essa lembrança.