# Material Teórico - Módulo de INTRODUÇÃO À LÓGICA MATEMÁTICA

## Outras Técnicas de Prova

## Tópicos Adicionais

**Autor: Prof. Francisco Bruno Holanda**
**Revisor: Prof. Antônio Caminha Muniz Neto**

**12 de setembro de 2019**

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

# 1 Prova pela contrapositiva

Já vimos que uma das formas de se demonstrar resultados em Matemática é através de uma prova direta. Neste material apresentaremos mais duas formas de como podemos provar teoremas e proposições: a prova pela contrapositiva e a demonstação por absurdo.

Já aprendemos nas aulas de Lógica proposicional que determinadas proposições são equivalentes. Em particular, uma proposição condicional $p \to q$ é equivalente à sua contrapositiva $\neg q \to \neg p$. Recordemos que isso pode ser verificado pela tabela verdade a seguir:

| $p$ | $q$ | $\neg q$ | $\neg p$ | $p \to q$ | $\neg q \to \neg p$ |
|---|---|---|---|---|---|
| T | T | F | F | T | T |
| T | F | T | F | F | F |
| F | T | F | T | T | T |
| F | F | T | T | T | T |

Portanto, para mostrar que uma proposição é verdadeira, é suficiente mostrar que sua contrapositiva é verdadeira. A fim de verficar como esse processo funciona na prática, examinemos um exemplo concreto.

**Exemplo 1.** *Suponha que $x$ seja um número inteiro tal que $5x + 11$ é ímpar. Mostre que $x$ é par.*

**Prova direta.** Uma vez que a prova é direta, temos de partir do fato de que $5x+11$ é ímpar e deduzir diretamente que $x$ é par.

Se $5x + 11$ é ímpar, então $5x$ é par. Portanto, $2 \mid 5x$. Como 2 e 5 são relativamente primos, devemos ter que $2 \mid x$. Assim, $x$ é par. □

**Prova pela contrapositiva.** A contrapositiva da proposição "*Se $5x+11$ é ímpar, então $x$ é par*" é "*Se $x$ não é par, então $5x+11$ não é ímpar*". Demonstremos (de forma direta) essa última proposição.

Suponha que $x$ não é par. Logo, $x$ será ímpar. Assim, $5x$ também será ímpar, já que é o produto de dois números ímpares. Por fim, $5x+11$, como soma de dois ímpares, será par. Portanto, $5x + 11$ não é ímpar. □

Você deve estar se perguntando porque aprender a utilizar a demonstração pela contrapositiva, se já sabemos utilizar a técnica de prova direta? A resposta pode ser encontrada no próximo exemplo, em que uma prova direta é mais complicada de ser estruturada do que uma demonstração pela contrapositiva.

**Exemplo 2.** *Suponha que $x$ seja um número inteiro tal que $x^2 - 8x + 3$ é ímpar. Mostre que $x$ é par.*

**Prova pela contrapositiva.** A contrapositiva de "*Se $x^2 - 8x + 3$ é ímpar, então $x$ é par*" é "*Se $x$ não é par, então $x^2 - 8x + 3$ não é ímpar*". Mostremos esta última proposição.

Suponha que $x$ não é par. Logo, $x$ é ímpar. Assim, $x^2$ também é ímpar, já que é o produto de dois números ímpares. Por fim, $x^2-8x$ é também ímpar e, daí, $x^2-8x+3$ é par. Portanto, $x^2 - 8x + 3$ não é ímpar. □

Finalizemos esta seção com um exemplo mais algébrico.

**Exemplo 3.** *Sejam $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $y^3 + yx^2 \le x^3 + xy^2$. Prove que $y \le x$.*

**Prova (pela contrapositiva).** Vamos supor a validade da negação lógica de $y \le x$, isto é, que $y > x$, e deduzir a validade da negação lógica de $y^3 + yx^2 \le x^3 + xy^2$, isto é, $y^3 + yx^2 > x^3 + xy^2$.

Como $y > x$, temos $y - x > 0$. Agora, mostrar que $y^3+yx^2 > x^3+xy^2$ é o mesmo que mostrar que $y^3+yx^2-x^3-xy^2 > 0$. Para o que falta, note primeiramente que

$$\begin{aligned}
y^3 + yx^2 - x^3 - xy^2 &= (y^3 - x^3) + (x^2y - xy^2)\\
&= (y-x)(y^2+yx+x^2) + xy(x-y)\\
&= (y-x)(y^2+yx+x^2) - xy(y-x)\\
&= (y-x)[(y^2+yx+x^2) - xy]\\
&= (y-x)(y^2+x^2).
\end{aligned}$$

Em seguida, veja que $x^2, y^2 \ge 0$ implica $x^2 + y^2 \ge 0$. Mas, não podemos ter $x^2 + y^2 = 0$, pois isso acarretaria $x^2 = y^2 = 0$ e, daí, $x = y = 0$; entretanto, estamos supondo $y > x$. Portanto, $x^2 + y^2 > 0$ e, como $y - x > 0$, temos

$$y^3 + yx^2 - x^3 - xy^2 = (y-x)(y^2+x^2) > 0.$$

□

# 2 Prova por absurdo

Outra técnica de demonstração bastante utilizada é a prova **por absurdo** ou **por contradição**.

Esse método se baseia na equivalência entre $p \to q$ e $p \wedge (\neg q) \to r$, onde $r$ é uma proposição claramente falsa (isto é, uma contradição), e funciona conforme descrito a seguir.

Imagine que você está tentando demonstrar que $p \to q$. Para fazê-lo por absurdo, a ideia é, em vez de provar (de forma direta) $p \to q$, provar $p \wedge (\neg q) \to r$, para alguma contradição $r$. Para tanto, o primeiro passo é assumir que $p$ e $\neg q$ são verdadeiras; então, você demonstra que $p \wedge (\neg q) \to r$, para alguma contradição $r$ (que vai depender da situação que está sendo analisada).

Vejamos alguns exemplos concretos de demonstrações por absurdo.

**Exemplo 4** (Euclides)**.** *Mostre que existe um número infinito de números primos.*

**Prova (por absurdo).** Queremos mostrar que "*Se $X$ é o conjunto dos números primos, então $X$ é infinito*". Por contradição, suponhamos que $X$ é o conjunto dos números primos, e que $X$ é finito, digamos

$$X = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}.$$

Considere o número natural

$$P = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1.$$

Se $d$ é um divisor comum de $P$ e de $p_n$, então $d$ também divide a diferença $P - p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$, que vale 1; portanto, $\operatorname{mdc}(P, p_i) = 1$. De maneira análoga, cada um dos números primos $p_1$, $p_2$,..., $p_n$ é relativamente primo com $P$.

Por outro lado, como $P > 1$, existe um número primo $q$ tal que $q \mid P$. Mas, como $X$ é o conjunto de todos os primos, devemos ter $q = p_i$, para algum índice $i$ tal que $1 \leq i \leq n$. Ora, sendo assim $q >$ seria um divisor comum de $P$ e $p_i$, o que é uma contradição. Mais precisamente, a contradição que deduzimos foi

$$\operatorname{mdc}(P, p_i) = 1, \text{ e } q \mid P, p_i, \text{ com } q > 1.$$

□

**Exemplo 5.** *Mostre que* $\sqrt{2}$ *é um número irracional.*

**Prova (por absurdo).** Inicialmente, é um pouco estranho tentar ver o enunciado como uma proposição $p \to q$, mas isso pode ser feito pensando no enunciado da seguinte forma:

"*Se* $\alpha > 0$ *é tal que* $\alpha^2 = 2$*, então* $\alpha$ *é irracional.*"

(Evidentemente, $\alpha = \sqrt{2}$, mas escrevemos o enunciado dessa maneira para tornar clara uma estrutura $p \to q$ no enunciado e, por conseguinte, poder formular $p \wedge \neg q$.)

A fim de compor uma demonstração por absurdo, temos de começar supondo $p$ e $\neg q$, isto é, que $\alpha > 0$ é tal que $\alpha^2 = 2$, mas $\alpha$ não é irracional. Então, no final de contas, estamos supondo que $\sqrt{2}$ é racional e, a partir de tal suposição, precisamos deduzir alguma contradição.

Sendo $\sqrt{2}$ racional, existem inteiros não nulos $a$ e $b$ tais que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. Cancelando os possíveis fatores comuns a $a$ e $b$, também podemos supor que $\frac{a}{b}$ é irredutível.

Elevando ao quadrado ambos os membros da igualdade $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, obtemos

$$\frac{a^2}{b^2} = 2$$

ou, o que é o mesmo,

$$a^2 = 2b^2.$$

Então, $a^2$ é um número par, de forma que $a$ também é par. Assim, existe um inteiro não nulo $c$ tal que $a = 2c$. Substituindo $a = 2c$ em $a^2 = 2b^2$, obtemos

$$4c^2 = 2b^2;$$

simplificando, vem que

$$2c^2 = b^2.$$

Assim, $b^2$ também é um número par, de sorte que $b$ também é par. Mas, sendo $a$ e $b$ pares, concluímos que a fração $\frac{a}{b}$ é redutível, o que contradiz a suposição que fizemos (de que ela era irredutível). De outra forma, a contradição obtida foi

$$\frac{a}{b} \text{ é irredutível e } \frac{a}{b} \text{ é redutível.}$$

□

# 3 Mais algumas demonstrações

Nesta seção, exercitamos nossas habilidades de compor provas discutindo mais alguns exemplos.

**Exemplo 6** (Ivan Borsenco)**.** *É possível cortar um retângulo* $5 \times 6$ *em oito retângulos distintos, com dimensões inteiras e lados paralelos aos lados do retângulo maior?*

**Solução.** Os retângulos de menor área possível são:

| | |
|---|---|
| Área 1: $1 \times 1$. | Área 4: $2 \times 2$ e $1 \times 4$. |
| Área 2: $1 \times 2$. | Área 5: $1 \times 5$. |
| Área 3: $1 \times 3$. | Área 6: $2 \times 3$ e $1 \times 6$. |

Então, note que a menor área coberta por oito retângulos distintos deve ser pelo menos

$$1 + 2 + 3 + 4 + 4 + 5 + 6 + 6 = 31 > 30.$$

Logo, é impossível realizar a tarefa proposta. □

**Exemplo 7.** *Considere* 100 *números naturais não nulos cuja soma é* 5049*. Mostre que existem dois destes números que são iguais.*

**Solução.** Suponha que existam 100 naturais distintos cuja soma seja 5049. Sejam $a_1$, $a_2$,..., $a_{100}$ estes naturais, nomeados de tal forma que $a_1 < a_2 < \cdots < a_{100}$. Veja que o menor valor natural que $a_1$ pode assumir é 1, logo, $a_1 \geq 1$. De forma análoga, temos sucessivamente que $a_2 \geq 2$, $a_3 \geq 3$,..., $a_{100} \geq 100$. Somando todas estas desigualdades, temos:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{99} + a_{100} \geq \underbrace{1 + 2 + \cdots + 99 + 100}_{=S}.$$

Por outro lado, podemos calcular a soma $S$ utilizando a seguinte técnica: primeiramente, escrevemos a soma com os termos em sua ordem crescente:

$$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 99 + 100.$$

Em seguida, escrevemos a soma com os termos em ordem decrescente:

$$S = 100 + 99 + 98 + \cdots + 2 + 1.$$

Agora, somamos as duas igualdades acima membro a membro, de modo a somar as *colunas* dos lados esquerdos destas igualdades. Assim fazendo, obtemos

$$S + S = \underbrace{101 + 101 + 101 + \cdots + 101 + 101}_{100 \text{ parcelas}}.$$

Portanto, obtemos

$$2S = 100 \times 101 = 10.100,$$

de sorte que $S = 5.050$.

Como a soma de 100 naturais distintos é sempre pelo menos 5.050, ela nunca poderá ser igual a 5.049. Dessa forma, se a soma de 100 naturais for igual a 5.049, então é falsa a hipótese de que todos eles são distintos. Logo, há pelo menos dois desses naturais que são iguais. □

**Exemplo 8** (Olimpíada Russa). *Sejam $a, b, c$ números reais. Mostre que pelo menos uma das equações a seguir tem uma raiz real.*

$$x^2 + (a - b)x + (b - c) = 0;$$
$$x^2 + (b - c)x + (c - a) = 0;$$
$$x^2 + (c - a)x + (a - b) = 0.$$

**Prova.** Por contradição, suponha que $a$, $b$, $c$ são reais mas que nenhuma das equações dadas tenha raiz real (veja que já formulamos a negação da conclusão desejada).

Sabemos que, para uma equação quadrática não ter raiz real, seu discriminante deve ser menor que zero. Assim, devemos ter

$$(a - b)^2 - 4(b - c) < 0,$$
$$(b - c)^2 - 4(c - a) < 0,$$
$$(c - a)^2 - 4(a - b) < 0.$$

Somando membro a membro essas desigualdades (que são de mesmo sentido) e observando que $4(b - c) + 4(c - a) + 4(a - b) = 4(b - c + c - a + a - b) = 0$, obtemos:

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 < 0.$$

Porém, essa desigualdade é um absurdo, uma vez que o quadrado de um número real é sempre não negativo. (Formalmente, a contradição a que chegamos é "*$a$, $b$, $c$ são reais é $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 < 0$*".) □

## 4 Sugestões ao professor

Separe três encontros de 50 minutos cada para abordar o conteúdo deste material. No primeiro encontro, fale sobre prova por contrapositiva e no segundo apresente os exemplos de demonstração por absurdo. No terceiro, discuta as demonstrações adicionais.

Aproveite esses encontros para revisar o conteúdo de lógica proposicional ensinado ao longo deste módulo. Via de regra, os alunos têm uma dificuldade inicial em diferenciar uma demonstração por absurdo de uma demonstração por contrapositiva. Esse fato é de menor importância quando comparado com o uso correto de argumentos lógicos ao longo da demonstração.

Por fim, dê um tempo para que a turma pense em suas próprias demonstrações. Ao longo desse processo, sempre que possível você deve ofertar sugestões e auxilar os alunos a preencherem as lacunas ou corrigirem os eventuais erros de argumentação.