Material Teórico - Módulo Trigonometria II

Cosseno e seno da soma

Segundo Ano do Ensino Médio

Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

19 de agosto de 2022

Portal da Matemática
OBMEP

1 O seno do soma

Muitas vezes queremos usar um valor conhecido para o seno (ou cosseno) de alguns ângulos para calcular o seno (ou cosseno) de outros ângulos. Por exemplo, já conhecemos os valores dos senos e cossenos de $30°$, $45°$ e $60°$, entre outros, mas ainda não aprendemos quanto vale $\operatorname{sen}(75°)$.

Uma maneira de calcular $\operatorname{sen}(75°)$ é observar que $75 = 30 + 45$; entretanto, para que tal percepção seja útil, precisamos de uma maneira de relacionar $\operatorname{sen}(30° + 45°)$ com os valores já conhecidos de $\operatorname{sen}(30°)$ e $\operatorname{sen}(45°)$, digamos. Para isso, utilizamos a famosa fórmula do seno da soma de dois arcos:

$$\operatorname{sen}(A + B) = \operatorname{sen}(A)\cos(B) + \operatorname{sen}(B)\cos(A). \tag{1}$$

Exemplo 1. *Calcule o valor de* $\operatorname{sen}(75°)$.

Solução. Como $75 = 30 + 45$, usando a fórmula para o seno da soma de dois arcos com $A = 30°$ e $B = 45°$, obtemos:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(30° + 45°) &= \operatorname{sen}(30°)\cos(45°) + \operatorname{sen}(45°)\cos(30°)\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\\ &= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.\end{aligned}$$

□

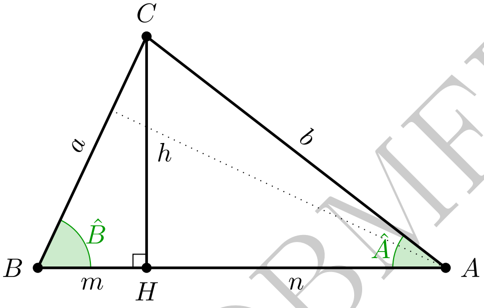
Observação 2. *É folclórico memorizar a equação acima modificando a primeira estrofe do poema Canção do Exílio*[1]*: "minha terra tem palmeiras onde canta o sabiá, seno A cosseno B, seno B cosseno A".*

A seguir, demonstraremos a validade de (1) no caso em que A e B são ângulos agudos (isto é, situados entre 0 e 90 graus). Vale ressaltar, contudo, que a fórmula é verdadeira

[1] O poema inteiro, de autoria do escritor maranhense Gonçalves Dias (1823-1964), pode ser lido em `http://www.horizonte.unam.mx/brasil/gdias.html`

para quaisquer valores de A e B, inclusive valores negativos ou maiores que $90°$ (ou mesmo maiores que $360°$); contudo, não faremos a demonstração geral por envolver uma análise de casos tediosa.

Dados ângulos $0 < A < 90°$ e $0 < B < 90°$, construa um triângulo ABC como na figura abaixo (isto é, tal que os ângulos dados sejam dois de seus ângulos internos). Sejam $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ e $c = \overline{AB}$ os comprimentos dos lados.



Por simplicidade, chamaremos de A, B, C também as medidas dos ângulos $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$, respectivamente. É claro que $C = 180 - (A + B)$. Então, uma vez que $\operatorname{sen}(180 - x) = \operatorname{sen} x$ para todo x, temos

$$\operatorname{sen}(A + B) = \operatorname{sen} C. \qquad (2)$$

Agora, calculemos a área do triângulo ABC de duas maneiras.

Por uma lado, observando o triângulo retângulo formado pelos pontos A e C e pelo pé da altura relativa a BC (veja, na figura, a linha pontilhada), vemos que a altura de ABC relativa ao lado AB mede $b \operatorname{sen} C$. Então, uma vez que a área do triângulo é igual à metade do produto do lado a pela altura relativa a ele, temos

$$\text{Área}(ABC) = \frac{1}{2} ab \operatorname{sen}(C).$$

Por outro lado, tal área pode ser obtida somando-se as áreas dos triângulos BHC e AHC:

$$\text{Área}(ABC) = \frac{mh}{2} + \frac{nh}{2}.$$

Igualando as duas expressões obtidas para a área de ABC, chegamos a

$$\frac{1}{2}ab\,\text{sen}(C) = \frac{mh}{2} + \frac{nh}{2},$$

ou, simplesmente,

$$ab\,\text{sen}(C) = mh + nh.$$

Observando os triângulos retângulosBHC e AHC, temos (acompanhe na figura)

$$m = a\cos B \quad \text{e} \quad n = b\cos A.$$

Substituindo esses valores na equação anterior, ficamos com

$$ab\,\text{sen}(C) = a\cos(B)h + b\cos(A)h.$$

Dividindo ambos os lados por ab, temos

$$\text{sen}(C) = \cos(B)\cdot\frac{h}{b} + \cos(A)\cdot\frac{h}{a}.$$

Olhando mais uma vez para os triângulos retângulos BHC e AHC, percebemos que

$$\text{sen}(A) = \frac{h}{b} \quad \text{e} \quad \text{sen}(B) = \frac{h}{a}.$$

Logo,

$$\text{sen}(C) = \cos(B)\,\text{sen}(A) + \cos(A)\,\text{sen}(B).$$

Por fim, substituindo essa igualdade em (2), obtemos a expressão desejada.

□

Um caso particular de (1) que vale a pena ser destacado é quando $A = B$. Assim sendo, temos

$$\text{sen}(A + A) = \text{sen}(A)\cos(A) + \text{sen}(A)\cos(A).$$

Neste caso, a fórmula pode ser simplificada para o que chamamos de fórmula do **seno do arco duplo**:

$$\boxed{\text{sen}(2A) = 2\,\text{sen}(A)\cos(A).} \tag{3}$$

2 Outras fórmulas úteis

Todas as demais fórmulas deste material são consequência da fórmula para o seno da soma, e são suficientemente úteis para que as listemos e sugiramos que você as memorize.

2.1 O seno da diferença

Vamos começar deduzindo dela uma fórmula para o seno da diferença de dois arcos. Queremos mostrar o seguinte.

$$\operatorname{sen}(A-B)=\operatorname{sen}(A)\cos(B)-\operatorname{sen}(B)\cos(A). \tag{4}$$

Para ver que isso é verdade, basta escrever a diferença $A-B$ como $A+(-B)$. Daí, podemos aplicar a fórmula para o seno de uma soma, com $-B$ no lugar de B:

$$\operatorname{sen}(A+(-B))=\operatorname{sen}(A)\cos(-B)+\operatorname{sen}(-B)\cos(A).$$

Agora, basta lembrar que $\cos(-B)=\cos(B)$ e $\operatorname{sen}(-B)=-\operatorname{sen}(B)$ (como se pode verificar no círculo trigonométrico). Substituindo esses valores na expressão anterior, obtemos

$$\operatorname{sen}(A+(-B))=\operatorname{sen}(A)\cos(B)+\operatorname{sen}(B)\,(-\cos(A)),$$

que é equivalente à fórmula que queríamos demonstrar.

2.2 O cosseno da soma

A fim de obter uma expressão para $\cos(A+B)$ vamos usar que, para qualquer x, tem-se $\cos(x)=\operatorname{sen}(90^\circ-x)$. Dessa forma,

$$\cos(A+B)=\operatorname{sen}(90^\circ-(A+B))=\operatorname{sen}((90^\circ-A)-B).$$

Em seguida, aplicamos a fórmula para o seno da diferença, com $90^\circ-A$ no lugar de A, para obter

$$\cos(A+B)=\operatorname{sen}(90^\circ-A)\cos(B)-\operatorname{sen}(B)\cos(90^\circ-A).$$

Por fim, substituindo $\operatorname{sen}(90° - A) = \cos(B)$ e $\cos(90° - A) = \operatorname{sen}(B)$, obtemos a famosa expressão:

$$\boxed{\cos(A + B) = \cos(A)\cos(B) - \operatorname{sen}(B)\operatorname{sen}(A).} \tag{5}$$

Aqui também vale a pena observar o caso particular $A = B$, quando obtemos

$$\boxed{\cos(2A) = \cos^2(A) - \operatorname{sen}^2(A).} \tag{6}$$

2.3 O cosseno da diferença

O mesmo artifício usado para o seno da diferença nos permite mostrar que:

$$\boxed{\cos(A - B) = \cos(A)\cos(B) + \operatorname{sen}(B)\operatorname{sen}(A).} \tag{7}$$

De fato, pela fórmula do cosseno da soma, temos que:

$$\cos(A + (-B)) = \cos A \cos(-B) - \operatorname{sen} A \operatorname{sen}(-B).$$

Para concluir, basta usar que $\cos(-B) = \cos(B)$ e $\operatorname{sen}(-B) = -\operatorname{sen}(B)$.

Observação 3. *Para fins de memorização, gostaríamos de chamar a atenção para duas diferenças cruciais entre as fórmulas para o seno e para o cosseno da soma ou subtração de arcos.*

A primeira é que na expansão de $\operatorname{sen}(A + B)$ *o sinal de soma é preservado, pois somamos* $\operatorname{sen}(A)\cos(B)$ *com* $\operatorname{sen}(B)\cos(A)$*; da mesma forma, na expansão de* $\operatorname{sen}(A - B)$ *o sinal de subtração também é preservado. Por outro lado, nas expansões de* $\cos(A + B)$ *e* $\cos(A - B)$ *os sinal de soma e subtração são invertidos.*

A segunda é que nas fórmulas para $\operatorname{sen}(A + B)$ *e para* $\operatorname{sen}(A - B)$ *o seno e o cosseno se alternam (o seno de* A *é* *multiplicado pelo cosseno de B, e vice-versa), ao passo que nas fórmulas para* $\operatorname{sen}(A+B)$ *e para* $\operatorname{sen}(A-B)$ *os cossenos aparecem juntos (cosseno de A multiplica cosseno de B) e os senos aparecem juntos (seno de A multiplica seno de B).*

2.4 A tangente da soma

Para obter a expressão de $\operatorname{tg}(A+B)$, começamos usando que

$$\operatorname{tg}(A+B) = \frac{\operatorname{sen}(A+B)}{\cos(A+B)}$$

e aplicando as fórmulas para o seno e o cosseno da soma, chegando a

$$\operatorname{tg}(A+B) = \frac{\operatorname{sen}(A)\cos(B) + \operatorname{sen}(B)\cos(A)}{\cos(A)\cos(B) - \operatorname{sen}(B)\operatorname{sen}(A)},$$

Em seguida, dividimos o numerador e o denominador por $\cos(A)\cos(B)$, obtendo

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}(A+B) &= \frac{\frac{\operatorname{sen}(A)\cos(B)}{\cos(A)\cos(B)} + \frac{\operatorname{sen}(B)\cos(A)}{\cos(A)\cos(B)}}{\frac{\cos(A)\cos(B)}{\cos(A)\cos(B)} - \frac{\operatorname{sen}(B)\operatorname{sen}(A)}{\cos(A)\cos(B)}} \\ &= \frac{\frac{\operatorname{sen}(A)}{\cos(A)} + \frac{\operatorname{sen}(B)}{\cos(B)}}{1 - \frac{\operatorname{sen}(A)}{\cos(A)} \cdot \frac{\operatorname{sen}(B)}{\cos(B)}} \\ &= \frac{\operatorname{tg}(A) + \operatorname{tg}(B)}{1 - \operatorname{tg}(A)\operatorname{tg}(B)}.\end{aligned}$$

Em resumo,

$$\operatorname{tg}(A+B) = \frac{\operatorname{tg}(A) + \operatorname{tg}(B)}{1 - \operatorname{tg}(A)\operatorname{tg}(B)}. \tag{8}$$

A partir da fórmula para a tengente da soma, e utilizando o fato de que $\operatorname{tg}(-B) = -\operatorname{tg}(B)$, é imediato (verifique!) que

$$\operatorname{tg}(A-B) = \frac{\operatorname{tg}(A) - \operatorname{tg}(B)}{1 + \operatorname{tg}(A)\operatorname{tg}(B)}.$$

Por outro lado, fazendo $A = B$ em (8), chegamos à fórmula para a tangente do arco duplo:

$$\operatorname{tg}(2A) = \frac{2\operatorname{tg}(A)}{1 - \operatorname{tg}^2(A)}.$$

3 Exercícios

Nesta seção, ilustramos a aplicação das fórmulas deduzidas resolvendo vários exemplos. Outros tantos podem ser encontrados nas referências [2] e [3].

Uma observação preliminar importante é que as fórmulas que discutimos valem igualmente para ângulos dados em radianos, em vez de em graus.

Exemplo 4. *Calcule os valores de* $\operatorname{sen}(\pi/12)$, $\cos(\pi/12)$ *e* $\operatorname{tg}(\pi/12)$.

Solução. Observe que

$$\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}.$$

Assim, temos que:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) \\
&= \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} \\
&= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.
\end{aligned}$$

Da mesma forma, podemos calcular o cosseno:

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\\
&= \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\\
&= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.
\end{aligned}$$

Poderíamos calcular $\operatorname{tg}(\pi/12)$ fazendo o quociente entre $\operatorname{sen}(\pi/12)$ e $\cos(\pi/12)$. Contudo, para treinar, vamos usar a fórmula da tangente da diferença de dois arcos:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\\
&= \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right)}\\
&= \frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}\cdot 1}\\
&= \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}.
\end{aligned}$$

A última expressão pode ser simplificada racionalizando o denominador. Para isso, basta multiplicar o numerador e o denominador por $\sqrt{3}-1$.

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1}\\
&= \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{\sqrt{3}^2-1^2}\\
&= \frac{4-2\sqrt{3}}{2}\\
&= 2-\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

□

Exemplo 5. *Calcule o valor de* $\cos^4(\frac{\pi}{24}) - \operatorname{sen}^4(\frac{\pi}{24})$.

Solução. Sendo $x = \cos(\frac{\pi}{24})$ e $y = \operatorname{sen}(\frac{\pi}{24})$, queremos calcular o valor de $x^4 - y^4$. Começamos fatorando essa expressão como:

$$x^4 - y^4 = (x^2 + y^2)(x^2 - y^2).$$

Pela relação fundamental da Trigonometria, temos que $x^2 + y^2 = 1$. Assim, basta calcular $x^2 - y^2$, ou seja, o valor pedido é igual a:

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{24}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{24}\right).$$

Agora, aplicando (6) com $A = \frac{\pi}{24}$, vemos que a última expressão é igual a $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$. Já calculamos esse valor no Exemplo 4, de forma que

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{24}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{24}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

$\square$

Os próximos exemplos são mais difíceis. Para o primeiro deles, será útil observar que, graças à fórmula para o cosseno do arco duplo e à relação fundamental da Trigonometria, tem-se

$$\begin{aligned}\cos(2\alpha) &= \cos^2(\alpha) - \operatorname{sen}^2(\alpha)\\ &= \cos^2(\alpha) - (1 - \cos^2(\alpha))\\ &= -1 + 2\cos^2(\alpha),\end{aligned}$$

isto é,

$$\boxed{\cos^2(\alpha) = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}.} \tag{9}$$

Exemplo 6. *Calcule o valor de* $\cos 36^\circ - \cos 72^\circ$.

Solução. Seja $S = \cos 36^\circ - \cos 72^\circ$. Multiplicando e dividindo a expressão do enunciado por $2(\cos 36^\circ + \cos 72^\circ)$, obtemos

$$S = \frac{(\cos 36^\circ - \cos 72^\circ) \cdot 2(\cos 36^\circ + \cos 72^\circ)}{2(\cos 36^\circ + \cos 72^\circ)}$$

ou, o que é o mesmo,

$$S = \frac{2\cos^2 36^\circ - 2\cos^2 72^\circ}{2(\cos 36^\circ + \cos 72^\circ)}. \tag{10}$$

Usando (9) para $\alpha = 36$ e depois para $\alpha = 72$, e substituindo as expressões obtidas no numerador de (10), obtemos

$$\begin{aligned} S &= \frac{(1 + \cos 72^\circ) - (1 + \cos 144^\circ)}{2(\cos 36^\circ + \cos 72^\circ)} \\ &= \frac{\cos 72^\circ - \cos 144^\circ}{2(\cos 36^\circ + \cos 72^\circ)}. \end{aligned}$$

Acontece que $36 + 144 = 180$, logo, $\cos 144^\circ = -\cos 36^\circ$. Substituindo na expressão anterior e simplificando obtemos

$$S = \frac{\cos 72^\circ - (-\cos 36^\circ)}{2(\cos 36^\circ + \cos 72^\circ)} = \frac{1}{2}.$$

□

Exemplo 7. *Calcule o valor de* $X = \operatorname{sen} 10^\circ \cdot \operatorname{sen} 50^\circ \cdot \operatorname{sen} 70^\circ$

Solução. Para simplificar a expressão do enunciado, vamos fazer uso, várias vezes, da fórmula para o seno do arco duplo,

$$\operatorname{sen}(2\alpha) = 2\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha).$$

Primeiramente, multiplicando e dividindo a expressão do enunciado por $\cos(10)$ (de modo a não alterar seu valor) obtemos.

$$\begin{aligned} X &= \frac{2 \cdot \operatorname{sen} 10^\circ \cdot \cos 10^\circ \cdot \operatorname{sen} 50^\circ \cdot \operatorname{sen} 70^\circ}{2\cos 10^\circ} \\ &= \frac{\operatorname{sen} 20^\circ \cdot \operatorname{sen} 50^\circ \cdot \operatorname{sen} 70^\circ}{2\cos(10)} \end{aligned}$$

Agora veja que $\operatorname{sen} 70^\circ = \cos 20^\circ$. Logo,

$$\begin{aligned} X &= \frac{\operatorname{sen} 20^\circ \cdot \operatorname{sen} 50^\circ \cdot \cos 20^\circ}{2\cos(10)} \\ &= \frac{2\operatorname{sen} 20^\circ \cdot \cos 20^\circ \cdot \operatorname{sen} 50^\circ}{4\cos(10)} \\ &= \frac{\operatorname{sen} 40^\circ \cdot \operatorname{sen} 50^\circ}{4\cos 10^\circ}. \end{aligned}$$

Da mesma forma, observamos que $\operatorname{sen} 50^\circ = \cos 40^\circ$. Logo,

$$\begin{aligned} X &= \frac{\operatorname{sen} 40^\circ \cdot \cos 40^\circ}{4 \cdot \cos 10^\circ} \\ &= \frac{2 \operatorname{sen} 40^\circ \cdot \cos 40^\circ}{8 \cdot \cos 10^\circ} \\ &= \frac{\operatorname{sen} 80^\circ}{8 \cdot \cos 10^\circ} = \frac{1}{8}, \end{aligned}$$

onde a última igualdade é válida pois $\operatorname{sen} 80^\circ = \cos 10^\circ$. □

Exemplo 8. *Calcule o valor da expressão*

$$\sqrt{\operatorname{sen}^4 15^\circ + 4\cos^2 15^\circ} - \sqrt{\cos^4 15^\circ + 4\operatorname{sen}^2 15^\circ}.$$

Solução. Poderíamos simplesmente calcular os valores de $\operatorname{sen} 15^\circ$ e $\cos 15^\circ$ (utilizando que $30 = 2 \cdot 15$) e, em seguida, substituir esses valores na expressão do enunciado. Porém, vamos adiar substituições numéricas e tentar primeiro simplificar a expressão original, a fim de fazer menos cálculos. Seja

$$A = \sqrt{\operatorname{sen}^4 \alpha + 4\cos^2 \alpha} - \sqrt{\cos^4 \alpha + 4\operatorname{sen}^2 \alpha},$$

para um ângulo α qualquer.

Dentro do primeiro radical, vamos usar a relação fundamental para substituir $\cos^2 \alpha$ por $1 - \operatorname{sen}^2 \alpha$; no segundo radical, vamos substituir $\operatorname{sen}^2 \alpha$ por $1 - \cos^2 \alpha$. Assim,

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{\operatorname{sen}^4 \alpha + 4(1 - \operatorname{sen}^2 \alpha)} - \sqrt{\cos^2 \alpha + 4(1 - \cos^2 \alpha)} \\ &= \sqrt{\operatorname{sen}^4 \alpha - 4\operatorname{sen}^2 \alpha + 4} - \sqrt{\cos^4 \alpha - 4\cos^2 \alpha + 4} \\ &= \sqrt{(\operatorname{sen}^2 \alpha - 2)^2} - \sqrt{(\cos^2 \alpha - 2)^2} \\ &= |\operatorname{sen}^2 \alpha - 2| - |\cos^2 \alpha - 2|. \end{aligned}$$

Observe que no último passo acima, precisamos tomar o cuidado de que $\sqrt{k^2}$ é igual ao valor absoluto de k, o qual não necessariamente igual a k. Acontece que $\operatorname{sen}^2 \alpha$ e $\cos^2 \alpha$ são números reais pertencentes ao intervalo [0,1], logo, tanto $\operatorname{sen}^2 \alpha - 2$ como $\cos^2 \alpha - 2$ são negativos. Portanto,

$$|\operatorname{sen}^2 \alpha - 2| = 2 - \operatorname{sen}^2 \alpha \quad \text{e} \quad |\cos^2 \alpha - 2| = 2 - \cos^2 \alpha.$$

Com isso, concluímos que:

$$\begin{aligned} A &= (2 - \operatorname{sen}^2\alpha) - (2 - \cos^2\alpha)\\ &= \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha\\ &= \cos(2\alpha). \end{aligned}$$

Agora sim, fazendo $\alpha = 15°$, obtemos

$$A = \cos(2 \cdot 15°) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

□

Dicas para o Professor

Sugerimos que o conteúdo desta aula seja abordado em dois ou três encontros de 50 minutos, possivelmente com a inclusão de exemplos adicionais, conforme a necessidade da turma.

Um ponto importante a observar é que, mesmo com o auxílio das fórmulas deduzidas aqui, há ângulos α para os quais não é possível calcular os valores exatos de $\operatorname{sen}\alpha$ e $\cos\alpha$ (e, logo, de $\operatorname{tg}\alpha$). Isso ocorre por razões que vão além do escopo destas notas. Entretanto, com um pouco de Cálculo (veja, por exemplo, a referência [1]), pode-se mostrar que $\operatorname{sen}\alpha$ e $\cos\alpha$ podem ser calculados, com aproximações tão boas quanto se queira, a partir das *expansões em série* (com α dado em radianos)

$$\operatorname{sen}\alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \frac{\alpha^7}{7!} + \dots$$

e

$$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \frac{\alpha^6}{6!} + \dots$$

A referência [2] desenvolve os rudimentos de Trigonometria necessários a aplicações geométricas. A referência [3] traz um curso completo de Trigonometria.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Fundamentos de Cálculo*. SBM, Rio de Janeiro, 2022.

2. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 2: Geometria Euclidiana Plana*. SBM, Rio de Janeiro, 2013.

3. G. Iezzi *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 3: Trigonometria*. Atual Editora, Rio de Janeiro, 2013.