

Material Teórico - Módulo de Semelhança de Triângulos e Teorema de Tales

Teorema de Tales - Parte II

Nono Ano do Ensino Fundamental

**Prof. Marcelo Mendes
Prof. Antonio Caminha**

02 de Março de 2026



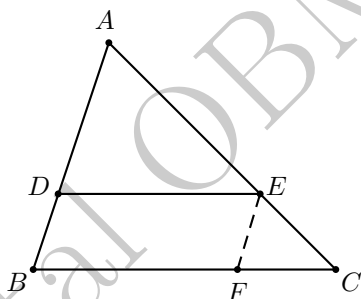
**PORTAL DA
MATEMÁTICA**
OBMEP

1 Algumas aplicações

Começamos este material com a proposição a seguir, a qual é uma consequência muito importante do teorema de Tales. De fato, ela é o primeiro exemplo de uma *semelhança de triângulos*, conceito que terá um papel central nas próximas aulas.

Proposição 1. *Se, sobre os lados AB e AC de um triângulo ABC , marcarmos pontos D e E tais que $\overleftrightarrow{DE} \parallel \overleftrightarrow{BC}$, então os lados dos triângulos ABC e ADE são respectivamente proporcionais. Mais precisamente,*

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{DE}}.$$



Prova. O teorema de Tales dá a primeira das igualdades do enunciado. Para a segunda igualdade trace, pelo ponto E (veja a figura acima), a reta paralela à reta AB , e marque seu ponto F de interseção com o lado BC . Então, por um lado, o quadrilátero $BFED$ tem lados opostos paralelos, logo, é um paralelogramo e, daí, $\overline{BF} = \overline{DE}$. Por outro, utilizando novamente o teorema de Tales (aplicado às paralelas AB e EF , com transversais AC e BC), obtemos

$$\frac{\overline{CF}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{AC}}.$$

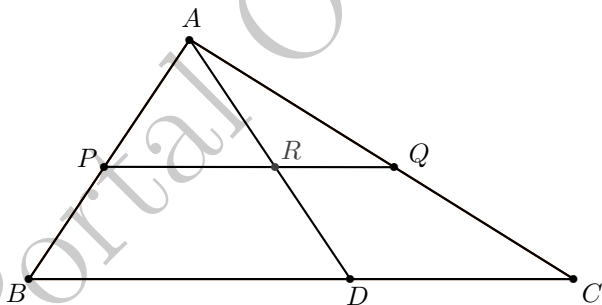
Então,

$$\begin{aligned}\frac{\overline{BC}}{\overline{DE}} &= \frac{\overline{BC}}{\overline{BC} - \overline{CF}} = \frac{1}{1 - \frac{\overline{CF}}{\overline{BC}}} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{\overline{CE}}{\overline{AC}}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AC} - \overline{CE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}}.\end{aligned}$$

□

Os próximos exemplos mostram como o teorema de Tales, aplicado em conjunção com o resultado da proposição anterior, nos permite obter alguns resultados úteis e abordar problemas mais difíceis.

Exemplo 2. Considere o triângulo ABC e uma ceviana AD , com D sobre o lado BC . Sejam P e Q pontos sobre os lados AB e AC , tais que $PQ \parallel BC$. Se AD intersectar PQ em R , mostre que R divide o segmento PQ na mesma razão em que D divide o segmento BC .



Solução. A proposição anterior, aplicada aos triângulos APR e ABD , dá

$$\frac{\overline{PR}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{AB}}.$$

Por outro lado, pelo teorema de Tales, temos

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{AC}}.$$

Agora, aplicando a proposição anterior aos triângulos ARQ e ADC , obtemos

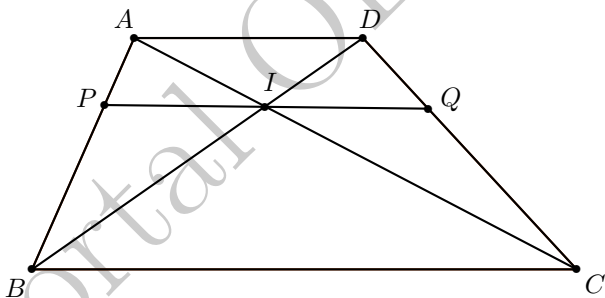
$$\frac{\overline{AQ}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{RQ}}{\overline{DC}}.$$

Combinando as três igualdades obtidas acima, segue que $\frac{\overline{PR}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{RQ}}{\overline{DC}}$ ou, o que é o mesmo,

$$\frac{\overline{PR}}{\overline{RQ}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}.$$

Mas isso significa exatamente que R divide PQ na mesma razão em que D divide o lado BC . $\square$

Exemplo 3. Seja $ABCD$ um trapézio de bases AD e BC . Seja I a interseção das diagonais AC e BD . Nas notações da figura a seguir, o segmento PQ é paralelo às bases do trapézio e passa por I ; mostre que $\overline{PI} = \overline{QI}$.



Prova. Aplicando a Proposição 1 aos triângulos ABD e PBI , obtemos

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{PI}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{PB}}.$$

Por outro lado, pelo Teorema de Tales, temos

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{QC}}.$$

Agora, aplicando a Proposição 1 aos triângulos DAC e QIC , segue que

$$\frac{\overline{DC}}{\overline{QC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{IQ}}.$$

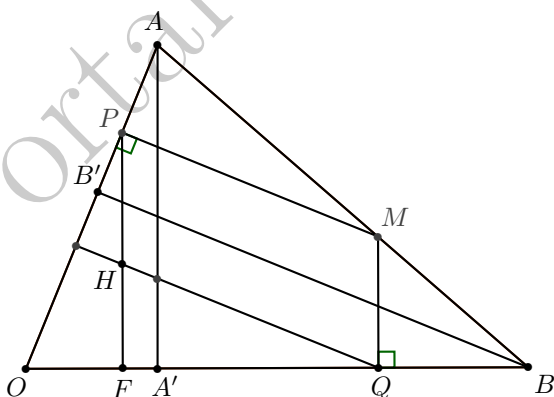
Combinando as três igualdades acima, obtemos finalmente

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{PI}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{IQ}},$$

de forma que $\overline{PI} = \overline{IQ}$. $\square$

Para o próximo exemplo, recordamos que, em todo triângulo, as três alturas passam por um mesmo ponto, conhecido como o **ortocentro** do triângulo.

Exemplo 4. É dado um triângulo OAB , tal que $\widehat{AOB} < 90^\circ$. Seja M um ponto sobre o lado AB , e denote por P e Q os pés das perpendiculares baixadas de M aos lados OA e OB , respectivamente. Se H é o ortocentro do triângulo OPQ , mostre que H pertence ao segmento $A'B'$, onde A' e B' denotam os pés das alturas do triângulo ABC , traçadas respectivamente a partir dos vértices A e B .



Prova. Como PH e MQ são perpendiculares a OB , elas são paralelas. Analogamente QH e MP são perpendiculares a OA , logo, também são paralelas. Portanto, o quadrilátero $PHQM$ tem seus pares de lados opostos paralelos, logo, é um paralelogramo.

Como $B'B \parallel PM$, o teorema de Tales dá

$$\frac{\overline{B'P}}{\overline{B'A}} = \frac{\overline{BM}}{\overline{BA}}.$$

Por outro lado, aplicando a Proposição 1 aos triângulos BMQ e BAA' , temos

$$\frac{\overline{BM}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{MQ}}{\overline{AA'}}.$$

Combinando as duas relações acima e levando em conta que $\overline{MQ} = \overline{PH}$ (uma vez que $PHQM$ é um paralelogramo), chegamos a

$$\frac{\overline{B'P}}{\overline{B'A}} = \frac{\overline{MQ}}{\overline{AA'}} = \frac{\overline{PH}}{\overline{AA'}}. \quad (1)$$

Agora, seja K o ponto de interseção entre os segmentos PH e $B'A'$ (não mostramos K na figura anterior). Como $K \in PH$ e $PH \parallel AA'$, temos $PK \parallel AA'$. Portanto, aplicando uma vez mais a Proposição 1, desta feita aos triângulos $B'PK$ e $B'AA'$, obtemos

$$\frac{\overline{B'P}}{\overline{B'A}} = \frac{\overline{PK}}{\overline{AA'}}. \quad (2)$$

Combinando (1) e (2), chegamos à relação

$$\frac{\overline{PH}}{\overline{AA'}} = \frac{\overline{PK}}{\overline{AA'}},$$

de onde segue que $\overline{PH} = \overline{PK}$ e, daí, $H = K$. Em particular, $H \in A'B'$. $\square$

2 Os teoremas da bissetriz

Nessa seção, aplicamos o Teorema de Tales ao estudo dos teoremas da bissetriz interna e externa relativas a um ângulo

de um triângulo dado. Começamos analisando o *Teorema da Bissetriz Interna*, que trata da razão em que o pé da bissetriz interna de um dos ângulos de um triângulo divide o lado correspondente. Observe que divisão do lado oposto a um vértice de um triângulo ao meio é realizada pela *mediana*, e não pela bissetriz interna.

O resultado fundamental é o que segue.

Teorema 5 (da bissetriz interna). *Seja ABC um triângulo qualquer. Se a bissetriz interna do ângulo $\angle A$ intersectar o lado BC no ponto D , então D divide o lado BC em dois segmentos proporcionais aos lados adjacentes de ABC , isto é,*

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{AC}}. \quad (3)$$

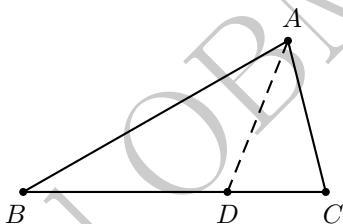
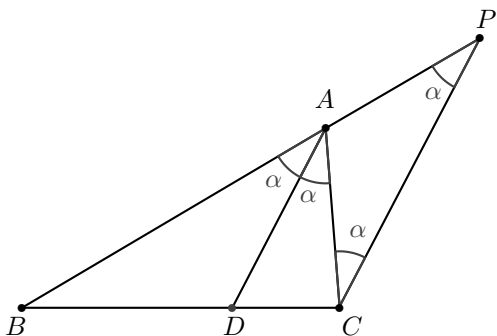


Figura 1: o teorema da bissetriz interna.

Observação 6. Veja que o lado esquerdo da igualdade acima representa a razão em que o ponto D divide o lado BC .

Prova. Sendo AD a bissetriz interna de $\angle A$, tracemos uma paralela pelo vértice C à bissetriz AD , a qual encontrará o prolongamento de $\overrightarrow{BA}$ em um ponto P (acompanhe na figura a seguir).

Pelo axioma das paralelas, o triângulo APC é isósceles (um de seus ângulos é alterno interno com uma das metades do ângulo $\angle A$ e o outro é correspondente à outra metade).



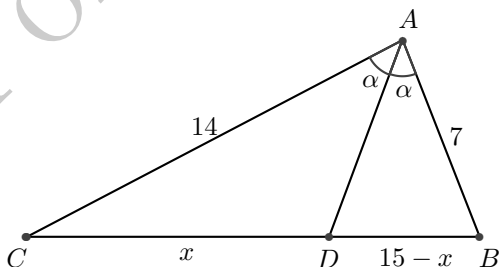
Portanto, segue do Teorema de Tales que $\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AP}}$,
ou, ainda (uma vez que $\overline{AP} = \overline{AC}$),

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}.$$

□

Exemplo 7. Os lados de um triângulo medem 7cm, 14cm e 15cm. Calcule a medida do maior segmento que a bissetriz interna do ângulo oposto ao maior lado determina sobre o mesmo.

Solução. Seja ABC um triângulo tal que $\overline{AB} = 7$, $\overline{BC} = 15$ e $\overline{AC} = 14$ (veja a figura a seguir).



Queremos calcular o comprimento do maior segmento determinado, sobre o lado BC , pela bissetriz interna AD que parte de A . Tal segmento será o adjacente a AC (pois a proporcionalidade do Teorema da Bissetriz Interna garante que o maior segmento determinado fica ao lado do maior lado).

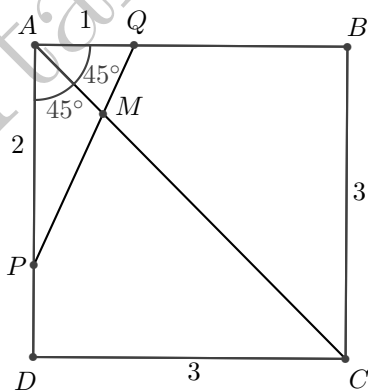
Seja x a medida desse segmento, o outro segmento sobre BC medirá $15 - x$. Agora, pelo Teorema da Bissetriz Interna, temos $\frac{BD}{AB} = \frac{CD}{AC}$, ou seja, $\frac{15 - x}{7} = \frac{x}{14}$. Agora,

$$\begin{aligned}\frac{15 - x}{7} &= \frac{x}{14} \Leftrightarrow 210 - 14x = 7x \\ \Leftrightarrow 21x &= 210 \Leftrightarrow x = 10.\end{aligned}$$

□

Exemplo 8. *Sejam P e Q pontos sobre os lados DA e AB , respectivamente, de um quadrado de lado 3, tais que $AP = 2$ e $AQ = 1$. Se a diagonal AC do quadrado intersectar o lado PQ no ponto M , calcule a razão em que M divide o segmento PQ .*

Solução. Observe a figura abaixo, representativa da situação em questão.



É bem sabido que as diagonais de um quadrado dividem seus ângulos internos ao meio; em nosso caso, isso significa que a diagonal AC divide o ângulo $\widehat{BAD}$ ao meio, de modo que AM é bissetriz interna do triângulo APQ . Daí, pelo Teorema da Bissetriz Interna, tem-se

$$\frac{\overline{PM}}{\overline{MQ}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{AQ}} = \frac{2}{1} = 2.$$

□

Voltemo-mos, agora, ao *Teorema da Bissetriz Externa*, que trata da razão em que o pé da bissetriz externa de um dos ângulos de um triângulo divide o prolongamento do lado correspondente.

Para o que segue, suponha dado um triângulo ABC tal que $\overline{AB} \neq \overline{AC}$. Assumindo, sem perda de generalidade, que $\overline{AB} > \overline{AC}$, não é difícil concluir (acompanhe na Figura 2) que a bissetriz do ângulo externo de ABC no vértice A (conhecida como a **bissetriz externa** de ABC relativa a A) intersecta a reta $\overleftrightarrow{BC}$ em um ponto E tal que $C \in DE$.

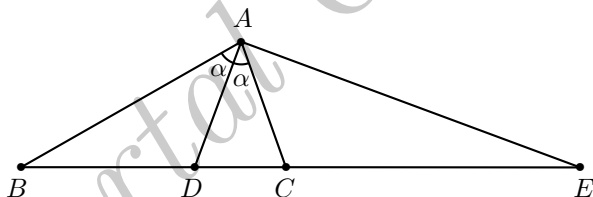


Figura 2: AE é bissetriz externa de $\angle A$.

Nesse caso, dizemos que E é o **pé da bissetriz externa** relativa ao vértice A (ou ao lado BC). Daqui em diante, assumiremos a validade de tais observações sem maiores comentários.

O resultado fundamental é o que segue.

Teorema 9 (da bissetriz externa). *Seja ABC um triângulo tal que $\overline{AB} > \overline{AC}$. Se E for o pé da bissetriz externa relativa ao*

vértice A , então E divide o lado BC (externamente) em dois segmentos proporcionais aos outros dois lados. Em símbolos,

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{AC}}.$$

Prova. Pelo ponto C , tracemos a reta CF paralela à reta AB , com F sobre o segmento AE (acompanhe na Figura 3).

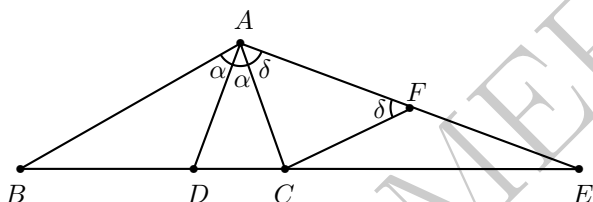


Figura 3: prova do teorema da bissetriz externa.

Sejam $\widehat{A} = 2\alpha$ e $\widehat{CAE} = \delta$. Como AE é bissetriz externa relativa ao vértice A , temos

$$\delta = \frac{1}{2}(180^\circ - 2\alpha) = 90^\circ - \alpha.$$

Por outro lado, como $\angle BAF$ e $\angle CFA$ são ângulos alternos internos, temos

$$\begin{aligned}\widehat{CFA} &= 180^\circ - \widehat{BAF} \\ &= 180^\circ - (2\alpha + \delta) \\ &= 2(90^\circ - \alpha) - \delta \\ &= 2\delta - \delta = \delta.\end{aligned}$$

Assim, ACF é um triângulo isósceles, com $\overline{AC} = \overline{CF}$.

Aplicando o Teorema de Tales às paralelas AB e CF , com transversais AE e BE , obtemos

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{CF}}.$$

Mas, uma vez que $\overline{AC} = \overline{DF}$, a igualdade anterior é o mesmo que

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{AC}}.$$

□

Observações 1.

- Perceba como é fácil lembrar o Teorema da Bissetriz Externa a partir do Teorema da Bissetriz Interna: basta substituir o ponto D pelo ponto E em (3).
- As bissetrizes interna e externa relativas a um mesmo vértice de um triângulo são sempre perpendiculares entre si. Verifique essa afirmação!

Exemplo 10. *Sejam ABC um triângulo retângulo em A e AD e AE as bissetrizes interna e externa, respectivamente, relativas ao vértice A . Se $\overline{AB} = 3$ e $\overline{AC} = 4$, então $\overline{DE}$ mede:*

- 17.
- 18.
- $\frac{120}{7}$.
- $\frac{125}{7}$.

Solução. Pelos teoremas da bissetriz interna e externa (faça uma figura para acompanhar, se achar necessário), temos

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{EC}} = \frac{3}{4}.$$

Agora,

$$\begin{aligned} \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{3}{4} &\Leftrightarrow \frac{\overline{BD}}{\overline{BD} + \overline{DC}} = \frac{3}{3+4} \\ &\Leftrightarrow \frac{\overline{BD}}{5} = \frac{3}{7} \Leftrightarrow \overline{BD} = \frac{15}{7} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{\overline{BE}}{\overline{EC}} = \frac{3}{4} &\Leftrightarrow \frac{\overline{BE}}{\overline{EC} - \overline{BE}} = \frac{3}{4-3} \\ &\Leftrightarrow \frac{\overline{BE}}{5} = \frac{3}{1} \Leftrightarrow \overline{BE} = 15.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\overline{ED} = \overline{EB} + \overline{BD} = \frac{15}{7} + 15 = \frac{120}{7}.$$

□

Exemplo 11. *Sejam D e E os pés das bissetrizes interna e externa, respectivamente, do ângulo $\angle A$ do triângulo ABC . Sabendo que $\overline{AB} = 4$, $\overline{AC} = 2$ e $\overline{BC} = 3$, calcule o comprimento do raio do círculo circunscrito ao triângulo ADE .*

Solução. Pelos teoremas da bissetriz interna e externa (faça uma figura para acompanhar os argumentos), temos

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{EC}} = \frac{4}{2} = 2.$$

Como $\overline{BC} = 3$, temos $\overline{BD} = 2$ e $\overline{DC} = 1$. Também,

$$\begin{aligned}\frac{\overline{BE}}{\overline{EC}} = \frac{4}{2} = 2 &\Leftrightarrow \frac{\overline{BE} - \overline{EC}}{\overline{EC}} = \frac{4-2}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{3}{\overline{EC}} = 1 \Leftrightarrow \overline{CE} = 3.\end{aligned}$$

Como AD e AE são perpendiculares, concluímos que o segmento DE , que mede 4, é o diâmetro do círculo circunscrito ao triângulo DAE . Assim, o comprimento do raio de tal círculo mede 2. □

Dicas para o Professor

O conteúdo deste material pode ser visto em um ou dois encontros de 50 minutos cada. Ao longo dos exemplos relativos aos teoremas da bissetriz, você deve sempre enfatizar qual das versões do teorema está sendo utilizada como ferramenta principal, assim como pode utilizar exemplos mais elaborados (veja as referências).

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 2: Geometria Euclidiana Plana*, terceira edição. Rio de Janeiro, Editora SBM, 2024.
2. O. Dolce e J. N. Pompeu. *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 9: Geometria Plana*. São Paulo, Atual Editora, 2013.