Material Teórico - Módulo de PROBLEMAS DOS CÍRCULOS MATEMÁTICOS - CAPÍTULOS 0 E 1

Problemas dos Capítulos 0 e 1 - Parte II

Problemas Resolvidos

Prof. Francisco Bruno Holanda
Revisor: Prof. Antonio Caminha

12 de Julho de 2021

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Problemas do capítulo 0

Exercício 1. *Nicole e Valéria chegaram a uma clareira redonda, cercada por árvores. Elas andaram em torno da clareira num mesmo sentido e contaram todas as árvores. Por terem começado de árvores diferentes, a* 20^a *árvore de Nicole era a* 7^a *de Valéria, enquanto a 7ª de Nicole correspondia à* 94^a *árvore de Valéria. Quantas árvores havia na clareira?*

Solução. Denote a 7^a árvore de Nicole por A e sua 20^a árvore por B. Seguindo no mesmo sentido da contagem de Nicole, há 12 árvores estritamente entre A e B.

Agora continue contando depois de passar pela árvore B, mas use a contagem de Valéria. Há 86 árvores entre B e A, já que há exatamente 86 inteiros maiores do que 7 e menores do que 94.

Então, lembrando de incluir A e B na contagem final, vemos que o número total de árvores é $12 + 86 + 2 = 100$. □

Exercício 2. *Um grupo saiu de uma floresta onde colheram flores. Eles andavam em pares, cada um dos quais formados por um menino e uma menina. Em cada par, o menino tinha ou o triplo ou um terço da quantidade de flores da menina. É possível que, ao todo, o grupo tenha* 2006 *flores?*

Solução. Em um par, se o menino tiver três vezes a quantidade de flores da menina, então o par tem, ao todo, quatro vezes a quantidade de flores da menina.

Por outro lado, se, em um par, o menino tem um terço da quantidade de flores da menina, então a menina tem três vezes a quantidade de flores do menino e o par tem, ao todo, quatro vezes a quantidade de flores do menino.

Em qualquer caso, o número total de flores em cada par é divisível por 4. Portanto, o número total de flores do grupo é uma soma de números divisíveis por 4, logo, também tem que ser divisível por 4.

No entanto, como 2006 não é divisível por 4, concluímos que o grupo inteiro não pode ter 2006 flores. □

2 Problemas do capítulo 1

Exercício 3. *É possível cortar diversos círculos de um quadrado de lado* 10 *cm de lado de modo que a soma dos diâmetros desses círculos seja maior ou igual a* 5 *metros?*

Solução. Sim, é possível. Para entender porque, dividamos o quadrado em quadradinhos de lados iguais a 1 mm, traçando retas paralelas a seus lados. Assim fazendo, como 10cm = 100mm, obtemos $100^2 = 10.000$ quadradinhos.

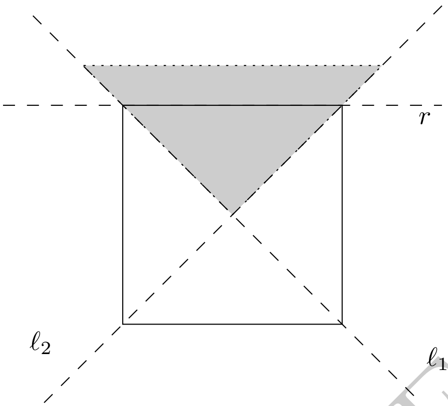
Em seguida, inscreva um círculos em cada quadradinho. O diâmetro de cada círculo é igual ao lado do quadradinhos, isto é, mede 1mm. Como há 10000 círculos, a soma de seus diâmetros é 10000mm, ou seja, 10m. □

Exercício 4. *Em uma folha de papel, um cientista desenha um quadrado usando tinta normal e marca um ponto usando uma tinta invisível ao olho humano. Usando uma régua e um lápis, uma pessoa traça uma reta na folha, após o que o pesquisador diz à pessoa de que lado da reta está o ponto invisível, ou se o ponto está sobre a reta. Qual o menor número de retas que a pessoa precisa desenhar para descobrir se o ponto está no quadrado?*

Solução. É fácil descobrir se o ponto está no quadrado com 4 retas: basta traçar as retas prolongando os lados do quadrado.

Por outro lado, também é possível fazer isso com apenas 3 retas. Para entender porque, desenhe a primeira reta ℓ_1 sobre uma das diagonais do quadrado (acompanhe na figura a seguir). Ela irá dividir o quadrado em duas metades triangulares e saberemos em qual metade do quadrado está o ponto. Depois, desenha a reta ℓ_2 que passa pela outra diagonal. Com isso, saberemos em qual das quatro regiões que são formadas por essas duas retas estará o ponto. Pinte essa região de cinza (um exemplo é mostrado na figura). Ao desenhar a reta r que passa sobre o lado do quadrado situado na região cinza, ela descobrirá se o ponto está dentro ou fora do quadrado.

Por fim, veja que é impossível limitar uma região finita usando apenas duas retas. Assim, independentemente de



como a pessoa desenhe duas retas, o ponto pode estar dentro do ângulo ilimitado por elas formado e que intersecta o quadrado. Dessa forma, com apenas duas retas ela pode não ter certeza se o ponto está dentro ou fora do quadrado. □

3 Problemas extras

Exercício 5 (Rússia, 1995). *Um trem deixa Moscou às x horas e y minutos, chegando em Saratov às y horas e z minutos. O tempo da viagem foi de z horas e x minutos. Ache todos os possíveis valores para x.*

Solução. Transformando os horários de chegada e partida em minutos e calculando a diferença entre ambos, concluímos que a viagem durou

$$(60y + z) - (60x + y)$$

minutos.

Por outro lado, o enunciado do problema garante que ela durou z horas e x minutos, ou seja, $60z + x$ minutos. Assim,

$$(60y + z) - (60x + y) = 60z + x$$

ou, o que é o mesmo,

$$60(y - x - z) = x + y - z. \quad (1)$$

Com isso, podemos garantir que $x + y - z$ é um múltiplo de 60.

Por outro lado, como $0 \leq x,y,z \leq 23$ (uma vez que x, y e z denotam horas do dia), temos que

$$-23 \leq x + y - z \leq 46.$$

Então, o único valor possível para $x + y - z$ é 0, de forma que $x + y = z$.

Além disso, a equação (1) dá $60(y - x - z) = 0$, de modo que $y = x + z$. Subtraindo membro a membro as igualdades

$$\begin{aligned} x + y &= z \\ y &= x + z \end{aligned},$$

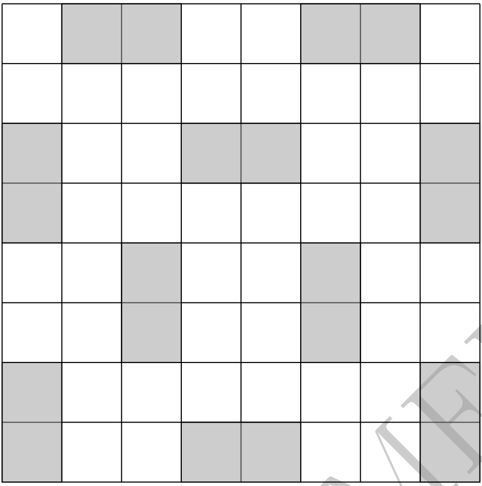
obtemos $x = -x$, de modo que $x = 0$. $\square$

Exercício 6. *Em cada casa de um tabuleiro 8×8 escrevemos um número inteiro. Sabe-se que, para cada casa, a soma dos números escritos nas casas vizinhas é igual a 1. Encontre a soma de todos os números do tabuleiro. (Observação: duas casas do tabuleiro são consideradas vizinhas se tiverem um lado em comum.)*

Solução. Observe as casas marcadas no tabuleiro a seguir:

Os vizinhos das casas marcadas cobrem todo o tabuleiro, sendo cada uma das 64 casas do tabuleiro contada exatamente uma vez. Como a soma dos vizinhos de cada casa é 1, a soma total dos números do tabuleiro será igual ao número de casas pintadas, que é 20. $\square$

Exercício 7 (Olimpíada de Maio, 2020). *Uma formiga distraída faz a seguinte rota: começando no ponto A ela anda $1cm$ para o Norte, depois $2cm$ para o Leste, continua $3cm$ para o Sul, em seguida $4cm$ para o Oeste, imediatamente $5cm$ para o Norte, continua $6cm$ para o Leste e assim sucessivamente, até que anda $41cm$ para o Norte e termina no ponto B. Calcule a distância, em linha reta, entre os pontos A e B.*



Solução. Observe que a formiga faz um caminho que muda de direção em um padrão que se repete a cada 4 movimentos e é dado por: Norte, Leste, Sul, Oeste, Norte, Leste, Sul, Oeste,....

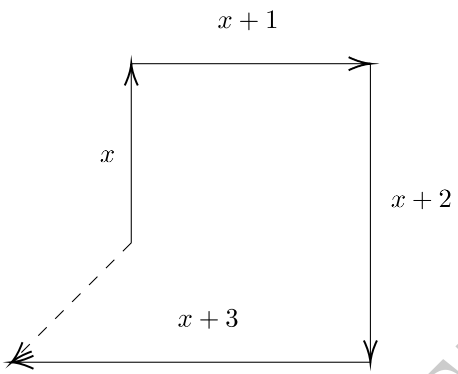
A cada bloco de quatro movimentos (acompanhe na figura a seguir), a formiga anda x centímetros para o Norte e $x+2$ centímetros para o Sul. Além disso, ela anda $x+1$ centímetros para o Leste e $x+3$ centímetros para o Oeste. Assim, após um bloco de quatro movimentos, a formiga terá andado dois centímetros para o Sul e dois centímetros para o Oeste, em relação à sua posição antes de iniciar esse bloco de quatro movimentos.

Como $41 = 4 \cdot 10 + 1$, o passeio da formiga é composto por 10 blocos de 4 movimentos “Norte, Leste, Sul, Oeste”, juntamente com uma subida final de 41 centímetros para o Norte.

Assim, se a formiga começa na posição (0,0), após os 10 blocos de 4 movimentos ela estará na posição

$$10 \cdot (-2, -2) = (-20, -20).$$

Então, após a subida final de 41 centímetros para o Norte,



ela terminará na posição

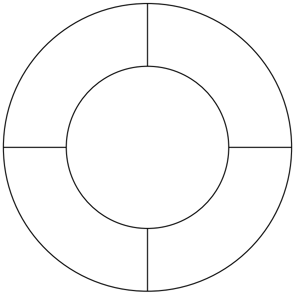
$$(-20,-20)+(0{,}41)=(-20{,}21).$$

Pelo Teorema de Pitágoras, a distância desse ponto até o ponto (0,0) vale

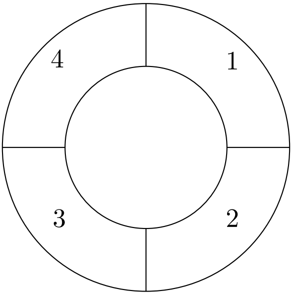
$$\sqrt{21^2+20^2}=\sqrt{441+400}=\sqrt{841}=29cm.$$

□

Exercício 8. *Devemos pintar os quatro arcos da figura a seguir utilizando quatro cores disponíveis, de modo que arcos vizinhos não possuam a mesma cor. De quantos modos podemos fazer isso? (Observação: a parte central não deve ser pintada.)*



Solução. Numere os arcos da configuração como mostra a figura a seguir:



Para realizarmos a contagem de forma adequada, vamos separar o problema em dois casos:

i. Se as casas 1 e 3 tiverem a mesma cor, temos quatro maneiras de escolhê-la. Uma vez feita essa escolha, podemos escolher a cor da casa 2 de três maneiras, pois basta não escolher a cor usada nas casas 1 e 3. O mesmo vale para casa 4. Logo, nesse caso temos $4 \times 3 \times 3 = 36$ maneiras de pintar a configuração.

ii. Se 1 e 3 têm cores diferentes, podemos escolher a cor da casa 1 de quatro maneiras e da casa 3 de três maneiras. Além disso, as cores das casas 2 e 4 podem ser escolhidas de duas maneiras cada, pois temos de evitar as cores escolhidas para as casas 1 e 3. Dessa forma, nesse caso temos $4 \times 3 \times 2 \times 2 = 48$ maneiras de pintar a configuração.

Concluímos que existem um total de $36 + 48 = 84$ maneiras de pintar a configuração. $\square$

Exercício 9. *Sobre uma mesa há* 98 *moedas iguais, sendo que* 49 *estão com a face "coroa" voltada para cima, enquanto* 49 *estão com a face "cara" para cima. Fernanda está de olhos fechados e foi desafiada a virar algumas moedas de modo que a quantidade de moedas "cara" sobre a mesa seja um número par. Como ela pode fazer isso?*

Solução. Fernanda deve separar as moedas aleatoriamente em dois grupos, de 49 moedas cada. No primeiro grupo, haverá x caras e $49 - x$ coroas; no segundo grupo, $49 - x$ caras e x coroas. Se Fernanda virar apenas as moedas do segundo grupo, ela ficará com $2x$ caras e $2(49-x)$ coroas. $\square$

Exercício 10 (Leningrado, 1980). *Alunos de* 10*,* 11 12 *e* 13 *anos* (*pelo menos um aluno de cada idade*) *participaram de um campeonato de xadrez. Sabe-se que a soma das idades de todos os participantes era* 253*. Além disso, sabe-se também que o número de alunos de* 12 *anos era igual a* 1,5 *vezes (uma vez e meia) o número de alunos de* 13 *anos. Quantos alunos de* 12 *anos havia no torneio? Encontre todas as possibilidades.*

Solução. Suponha que, no torneio, havia x, y, z e w alunos de 10, 11, 12 e 13 anos, respectivamente.

Pelas condições dadas, temos $z = 1{,}5w$, isto é, $2z = 3w$. Logo, z é múltiplo de 3 e w é par.

Além disso, como

$$10x + 11y + 12z + 13w = 253,$$

substituindo z por $1{,}5w$, obtemos

$$10x + 11y + 18w + 13w = 253,$$

ou seja,

$$10x + 11y + 31w = 253.$$

Essa última igualdade pode ser reescrita como

$$10(x + 2w) + 11(y + w) = 253, \tag{2}$$

de sorte que $y + w$ tem de ser um número terminado em 3.

Também, (2) garante que

$$253 = 10(x + 2w) + 11(y + w) \geq 30 + 11(y + w),$$

de forma que

$$y + w \leq \frac{253 - 30}{11} \cong 20{,}2.$$

Há, portanto, duas possibilidades:

i. Se $y + w = 3$, então $w = 2$ e $y = 1$. Portanto, $z = 3$. Além disso, (2) dá $10(x + 4) + 33 = 253$, logo, $x = 18$.

ii. Se $y + w = 13$, então (2) dá $x + 2w = 11$. Temos agora duas possibilidades para w: $w = 2$, que dá $z = 3$, $y = 11$ e $x = 7$; ou $w = 4$, em cujo caso $x = 3$, $y = 9$ e $z = 6$. $\square$

4 Sugestões aos professores

Ao professor que deseja criar um círculo matemático em sua escola, recomendamos, além do livro [1], os livros [2] e [3]. Neles, o professor encontrará problemas separados em conjuntos que tratam sobre um mesmo tema.

É importante que o professor entenda que a dinâmica de um encontro em um círculo matemático é diferente daquela comumente encontrada nas aulas de aula comuns. Em primeiro lugar, deve-se dar um tempo maior para que os alunos pensem em suas próprias soluções para os exercícios. Além disso, os alunos devem ser convidados a expor suas ideias (mesmo que parcialmente completas ou inconsistentes) aos colegas. A ideia é transformar uma solução incompleta de um problema em um debate construtivo, em que mais de uma pessoa possa colaborar para que a turma encontre uma solução correta.

Sugestões de Leitura Complementar

1. S. Dorichenko. *Um Círculo Matemático de Moscou: Problemas semana-a-semana.* IMPA, Rio de Janeiro, 2016.

2. D. Fomin, I. Itenberg e S. Genkin. *Círculos Matemáticos A Experiência Russa.* IMPA, Rio de Janeiro, 2012.

3. B. Holanda e E. Chagas. *Círculos de Matemática da OBMEP, Volume 1: Primeiros passos em Álgebra, Aritmética e Combinatória* IMPA, Rio de Janeiro, 2018.