Material Teórico - Módulo Áreas de Figuras Planas

Áreas de Figuras Planas: Mais Alguns Resultados

Nono Ano

Autor: Prof. Ulisses Lima Parente

Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

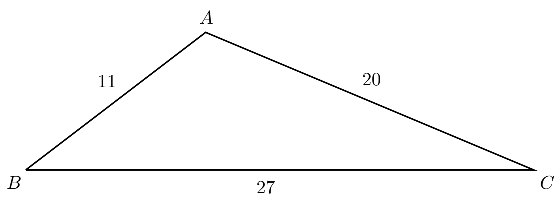
26 de novembro de 2018

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 A fórmula de Herão

Nesta aula, apresentaremos algumas fórmulas que nos permitem encontrar áreas de alguns polígonos. Tais fórmulas dependem apenas das medidas dos lados dos polígonos. Com o objetivo de motivar a descoberta dessas fórmulas, iniciamos com o seguinte

Problema 1. *Como calcular a área do triângulo escaleno dado na figura abaixo, cujos lados medem* 11*,* 20 *e* 27 *centímetros?*

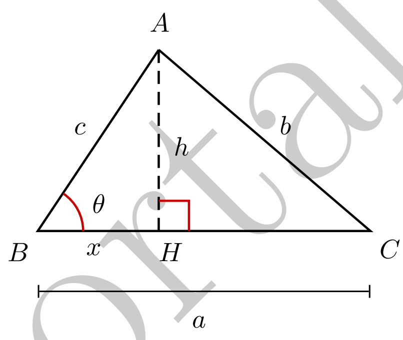


A solução do problema acima passa pelo seguinte resultado, que fornece uma fórmula, conhecida como **fórmula de Herão**, para o cálculo da área de um triângulo qualquer em função das medidas de seus lados. Para o enunciado da mesma, recordamos que o *semiperímetro* de um triângulo é a semissoma das medidas de seus lados.

Teorema 2 (Herão)**.** *Se ABC é um triângulo de lados a, b, c e semiperímetro p, então*

$$A(ABC) = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Prova. Suponhamos inicialmente que o triângulo ABC é acutângulo (veja a figura a seguir), e sejam H o pé da altura relativa ao lado BC, θ a medida do ângulo $\angle ABC$ e x a medida do segmento BH.



Observando as razões trigonométricas no triângulo retângulo ABH, temos que

$$\cos\theta = \frac{x}{c}.$$

Por outro lado, a lei dos cossenos aplicada ao triângulo ABC nos dá $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cdot\cos\theta$, de sorte que

$$\cos\theta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}.$$

Igualando os valores de $\cos\theta$ obtidos nas duas relações acima, obtemos $\frac{x}{\cancel{c}} = \frac{a^2+c^2-b^2}{2a\cancel{c}}$ ou, ainda,

$$x = \frac{a^2+c^2-b^2}{2a}.$$

Agora, aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo ABH, obtemos $x^2 + h^2 = c^2$, logo,

$$\begin{aligned} h^2 &= c^2 - x^2 \\ &= c^2 - \left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right)^2 \\ &= c^2 - \frac{(a^2+c^2-b^2)^2}{4a^2} \\ &= \frac{4a^2c^2 - (a^2+c^2-b^2)^2}{4a^2} \\ &= \frac{(2ac)^2 - (a^2+c^2-b^2)^2}{4a^2}. \end{aligned}$$

A partir da última expressão acima, utilizando a fatoração $u^2 - v^2 = (u+v)(u-v)$ algumas vezes, obtemos

$$\begin{aligned} &(2ac)^2 - (a^2+c^2-b^2)^2 = \\ &= \left(2ac + (a^2+c^2-b^2)\right)\left(2ac - (a^2+c^2-b^2)\right) \\ &= \left(a^2+2ac+c^2-b^2\right)\left(b^2-(a^2+c^2-2ac)\right) \\ &= \left((a+c)^2-b^2\right)\left(b^2-(a-c)^2\right) \\ &= (a+c+b)(a+c-b)(b+(a-c))(b-(a-c)) \\ &= (a+b+c)(a+c-b)(a+b-c)(b+c-a). \end{aligned}$$

Por fim, notando que $2p = a+b+c$ acarreta $b+c-a = 2p-2a = 2(p-a)$ e, analogamente, $a+b-c = 2(p-c)$ e $a+c-b = 2(p-b)$, podemos escrever

$$\begin{aligned} &(2ac)^2 - (a^2+c^2-b^2)^2 = \\ &= (a+b+c)(a+c-b)(a+b-c)(b+c-a) \\ &= 2p\cdot 2(p-b)\cdot 2(p-c)\cdot 2(p-a) \\ &= 16p(p-a)(p-b)(p-c). \end{aligned}$$

Então,

$$h^2 = \frac{16p(p-a)(p-b)(p-c)}{4a^2},$$

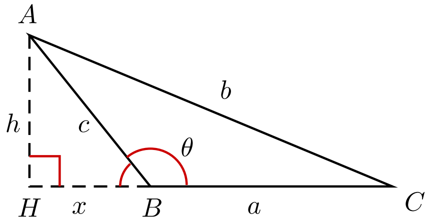
ou, o que é o mesmo,

$$h = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Portanto,

$$A(ABC) = \frac{a\cdot h}{2} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Argumentos análogos mostram a fórmula de Herão para o caso em que o triângulo ABC possui um ângulo obtuso em B (veja a próxima figura). Deixamos a prova deste caso a cargo do leitor.



Finalmente, se $\theta = 90^\text{o}$, então, nas notações da discussão acima, o Teorema de Pitágoras fornece $a^2 + c^2 = b^2$. Dessa forma, temos trivialmente

$$(2ac)^2 = (2ac)^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2,$$

e algebrismos análogos aos do primeiro caso fornecem

$$(2ac)^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2 = 16p(p-a)(p-b)(p-c).$$

Portanto,

$$(2ac)^2 = 16p(p-a)(p-b)(p-c),$$

o que nos dá

$$A(ABC) = \frac{ac}{2} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

□

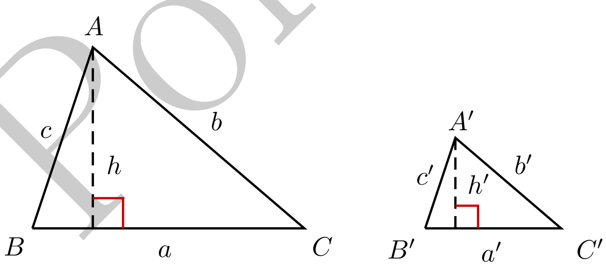
Podemos, agora, voltar ao Problema 1: pondo $a = 11$, $b = 20$, $c = 27$, temos $p = 29$, de sorte que

$$\begin{aligned} A(ABC) &= \sqrt{29(29-11)(29-20)(29-27)} \\ &= \sqrt{29 \cdot 18 \cdot 9 \cdot 2} = 18\sqrt{29}. \end{aligned}$$

2 Razão entre áreas de triângulos com um ângulo comum

Sejam ABC e $A'B'C'$ triângulos semelhantes com razão de semelhança igual a k (veja a figura abaixo). Pondo $\overline{BC} = a$ e $\overline{B'C'} = a'$, obtemos

$$\frac{a}{a'} = k.$$



Sendo H e H' os pés das alturas de ABC e $A'B'C'$ em relação aos lados BC e $B'C'$, respectivamente, é imediato que ABH e $A'B'H'$ também são semelhantes (por terem dois ângulos respectivamente iguais). Ademais, a razão de semelhança continua sendo k, uma vez que essa é a razão entre os comprimentos de AB e $A'B'$. Portanto, denotando por h e h' as alturas de ABC e $A'B'C'$ em relação aos lados BC e $B'C'$, respectivamente, temos

$$\frac{h}{h'} = k.$$

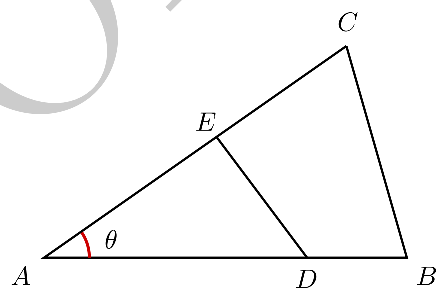
Desse modo, concluímos que

$$\frac{A(ABC)}{A(A'B'C')} = \frac{\frac{ah}{\cancel{2}}}{\frac{a'h'}{\cancel{2}}} = \frac{ah}{a'h'} = \frac{a}{a'} \cdot \frac{h}{h'} = k \cdot k = k^2,$$

resultado que enunciamos em palavras dizendo que

se dois triângulos são semelhantes, então a razão entre suas áreas é o quadrado da razão de semelhança.

Agora, suponha que os triângulos ABC e ADE possuem apenas um ângulo comum, digamos $\angle A$, como mostrado na figura abaixo:



Neste caso, a fórmula do seno para a área de triângulos, estudada anteriormente, nos dá

$$\begin{aligned} \frac{A(ADE)}{A(ABC)} &= \frac{\frac{\overline{AD} \cdot \overline{AE}}{\cancel{2}} \cdot \cancel{\operatorname{sen}\theta}}{\frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{\cancel{2}} \cdot \cancel{\operatorname{sen}\theta}} \\ &= \frac{\overline{AD} \cdot \overline{AE}}{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}. \end{aligned} \tag{1}$$

Utilizemos essa ideia para resolver o seguinte

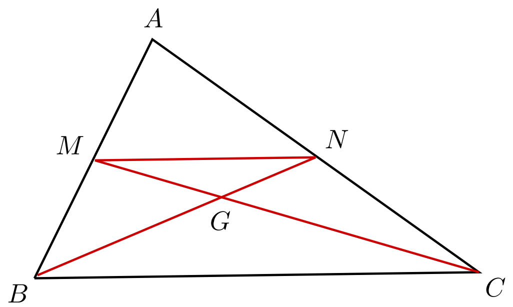
Exemplo 3. *O triângulo ABC, desenhado na figura a seguir, tem área igual a $120cm^2$. Sendo M o ponto médio do lado AB, N o ponto médio do lado AC e G o baricentro de ABC, calcule a área dos triângulos:*

(a) BCG.

(b) BMN.

(c) BGM.

(d) GMN.



Solução. Como $\overline{BM} = \frac{1}{2}\cdot\overline{BA}$, aplicando a relação (1) aos triângulos MBC e ABC (os quais têm o ângulo $\angle B$ em comum), obtemos:

$$\frac{A(MBC)}{A(ABC)} = \frac{\overline{BM}\cdot\cancel{\overline{BC}}}{\overline{BA}\cdot\cancel{\overline{BC}}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\cancel{\overline{BA}}}{\cancel{\overline{BA}}} = \frac{1}{2},$$

ou seja,

$$A(MBC) = \frac{1}{2}\cdot A(ABC) = \frac{1}{2}\cdot 120 = 60.$$

Agora, uma vez que G é o baricentro de ABC, sabemos de estudos anteriores que $\overline{CG} = \frac{2}{3}\cdot\overline{CM}$. Daí, observando que os triângulos BCG e MCB têm o ângulo $\angle C$ em comum, segue novamente de (1) que

$$\frac{A(BCG)}{A(MBC)} = \frac{\overline{CG}\cdot\cancel{\overline{CB}}}{\overline{CM}\cdot\cancel{\overline{CB}}} = \frac{\frac{2}{3}\cdot\cancel{\overline{CM}}}{\cancel{\overline{CM}}} = \frac{2}{3}.$$

Assim,

$$A(BCG) = \frac{2}{3}\cdot A(MBC) = \frac{2}{3}\cdot 60 = 40.$$

Do mesmo modo que mostramos que $A(MBC) = 60\text{cm}^2$, podemos mostrar que $A(NBC) = 60\text{cm}^2$ e, mais uma vez invocando a relação (1) (desta vez aplicada aos triângulos AMN e ABC), obtemos:

$$\frac{A(AMN)}{A(ABC)} = \frac{\overline{AM}\cdot\overline{AN}}{\overline{AB}\cdot\overline{AC}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\cancel{\overline{AB}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\cancel{\overline{AC}}}{\cancel{\overline{AB}}\cdot\cancel{\overline{AC}}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Então,

$$A(AMN) = \frac{1}{4}\cdot A(ABC) = \frac{1}{4}\cdot 120 = 30$$

centímetros quadrados e, daí,

$$\begin{aligned} A(BMN) &= A(ABC) - A(NBC) - A(AMN) \\ &= 120 - 60 - 30 = 30. \end{aligned}$$

Aplicando o mesmo raciocínio acima aos triângulos BGM e BMN (que têm o ângulo $\angle B$ em comum), obtemos:

$$\frac{A(BGM)}{A(BMN)} = \frac{\overline{BG}\cdot\cancel{\overline{BM}}}{\overline{BN}\cdot\cancel{\overline{BM}}} = \frac{\frac{2}{3}\cdot\cancel{\overline{BN}}}{\cancel{\overline{BN}}} = \frac{2}{3},$$

pois $\overline{BG} = \frac{2}{3}\cdot\overline{BN}$ (lembre-se de que G é o baricentro de ABC). Assim,

$$A(BMG) = \frac{2}{3}\cdot A(BMN) = \frac{2}{3}\cdot 30 = 20.$$

Finalmente, observando o ângulo $\angle N$ comum aos triângulos BMN e GMN, obtemos:

$$\frac{A(GMN)}{A(BMN)} = \frac{\overline{NG}\cdot\cancel{\overline{NM}}}{\overline{NB}\cdot\cancel{\overline{NM}}} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\cancel{\overline{NB}}}{\cancel{\overline{NB}}} = \frac{1}{3},$$

de modo que

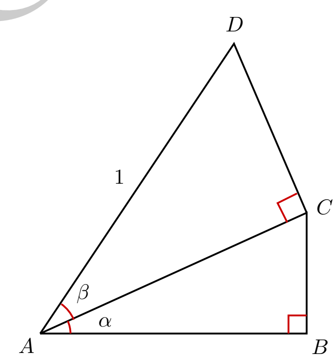
$$A(GMN) = \frac{1}{3}\cdot A(BMN) = \frac{1}{3}\cdot 30 = 10$$

centímetros quadrados. □

3 A fórmula de Brahmagupta

Iniciamos esta seção apresentando algumas identidades trigonométricas que serão úteis para os desenvolvimentos que pretendemos fazer.

Na figura abaixo, ABC é um triângulo retângulo em A e ACD é um triângulo retângulo em C, com hipotenusa $\overline{AD} = 1$.



Invocando as razões trigonométricas em ABC e em ACD, temos que

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{\overline{CD}}{1} \Longrightarrow \overline{CD} = \operatorname{sen}\beta,$$

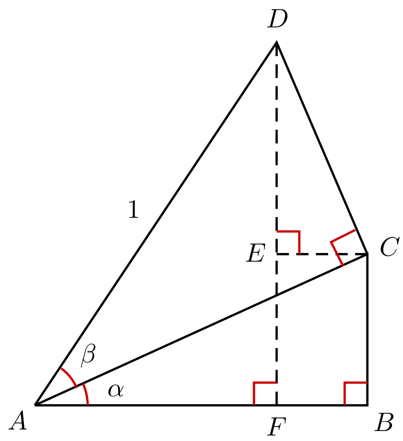
$$\cos\beta = \frac{\overline{AC}}{1} \Longrightarrow \overline{AC} = \cos\beta,$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \Longrightarrow \overline{BC} = \operatorname{sen}\alpha\cdot\overline{AC} = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta$$

e

$$\cos\alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \Longrightarrow \overline{AB} = \cos\alpha\cdot\overline{AC} = \cos\alpha\cos\beta.$$

Agora, como mostrado na próxima figura, sejam F o pé da perpendicular a AB passando por D e E o pé da perpendicular a DF pasando por C.



Calculando as razões trigonométricas no triângulo retângulo AFD, temos:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\frac{\overline{DF}}{1}\Longrightarrow \overline{DF}=\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$$

e

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{\overline{AF}}{1}\Longrightarrow \overline{AF}=\cos(\alpha+\beta).$$

Veja, ainda, que EC e AB são paralelos, pois $\angle DEC$ e $\angle EFA$ é um par de ângulos alternos internos de mesma medida (são ambos retos). Daí segue que $E\widehat{C}A=C\widehat{A}F=\alpha$, de sorte que

$$E\widehat{D}C=90^{\circ}-E\widehat{C}D=E\widehat{C}A=\alpha.$$

Assim, as razões trigonométricas no triângulo CED fornecem

$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{\overline{CE}}{\overline{CD}}=\frac{\overline{CE}}{\operatorname{sen}\beta}\Longrightarrow \overline{CE}=\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta$$

e

$$\cos\alpha=\frac{\overline{DE}}{\overline{CD}}=\frac{\overline{DE}}{\operatorname{sen}\beta}\Longrightarrow \overline{DE}=\operatorname{sen}\beta\cdot\cos\alpha.$$

Substituindo as expressões para $\overline{AF}$, $\overline{AB}$ e $\overline{CE}$ em

$$\overline{AF}=\overline{AB}-\overline{FB}=\overline{AB}-\overline{CE},$$

obtemos

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta. \tag{2}$$

Da mesma forma, a partir da igualdade

$$\overline{DF}=\overline{DE}+\overline{EF},$$

ficamos com

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta+\operatorname{sen}\beta\cdot\cos\alpha. \tag{3}$$

As fórmulas acima são conhecidas como o *cosseno da soma* e o *seno da soma*, respectivamente.

Fazendo $\alpha=\beta$ em (2) e (3), obtemos respectivamente:

$$\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha \tag{4}$$

e

$$\operatorname{sen}(2\alpha)=2\cdot\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha, \tag{5}$$

fórmulas conhecidas como o *cosseno do arco duplo* e o *seno do arco duplo*, também respectivamente.

Fazendo $\alpha=2\cdot\frac{\alpha}{2}$ em (4) e (com o auxílio da Relação Fundamental da Trigonometria) substituindo $\operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ por $1-\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, chegamos a

$$\begin{aligned}\cos\alpha&=\cos\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right)=\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)-\operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\\&=1-\operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)-\operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\\&=1-2\cdot\operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right),\end{aligned}$$

donde obtemos

$$\operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1-\cos\alpha}{2}. \tag{6}$$

De modo análogo, mas agora substituindo $\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ por $1-\operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, obtemos

$$\begin{aligned}\cos\alpha&=\cos\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right)=\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)-\operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\\&=\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)-\left(1-\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)\\&=2\cdot\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)-1,\end{aligned}$$

de onde concluímos que

$$\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1+\cos\alpha}{2}. \tag{7}$$

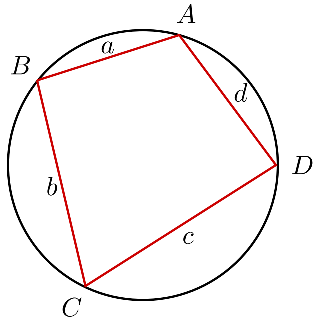
Com os preliminares trigonométricos acima à nossa disposição, podemos finalmente apresentar uma fórmula que permite calcular a área de quádriláteros inscrtíveis em função das medidas de seus lados. Tal fórmula é conhecida como **Fórmula de Brahmagupta**, e pode ser vista como uma generalização da fórmula de Herão. No entanto, frisamos que, contrariamente à fórmula de Herão, que é válida para *todo* triângulo, a fórmula de Brahmagupta só é válida para quadriláteros *inscritíveis*.

Teorema 4 (Brahmagupta). *Seja $ABCD$ um quadrilátero inscritível, com $\overline{AB}=a$, $\overline{BC}=b$, $\overline{CD}=c$ e $\overline{DA}=d$. Sendo p o semiperímetro de $ABCD$, temos*

$$A(ABCD)=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

Prova. Inicialmente, observe que a identidade

$$p=\frac{a+b+c+d}{2}$$



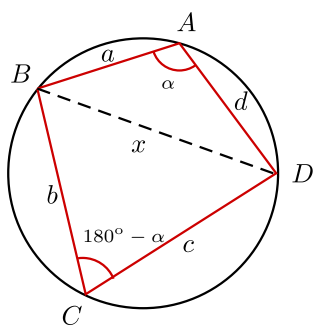
acarreta

$$b+c+d-a = 2p-2a = 2(p-a),$$
$$a+c+d-b = 2p-2b = 2(p-b),$$
$$a+b+d-c = 2p-2c = 2(p-c)$$

e

$$a+b+c-d = 2p-2d = 2(p-d).$$

Agora, denotemos $\alpha = B\widehat{A}D$ e $x = \overline{BD}$ (veja a figura abaixo).



Como $ABCD$ é inscritível, temos que $B\widehat{C}D = 180^{\text{o}} - \alpha$, logo,

$$\begin{aligned} A(ABCD) &= A(BAD) + A(BCD) \\ &= \frac{\overline{AB}\cdot\overline{AD}}{2}\cdot \operatorname{sen}\alpha + \frac{\overline{CB}\cdot\overline{CD}}{2}\cdot \operatorname{sen}(180^{\text{o}}-\alpha) \\ &= \frac{ad}{2}\cdot\operatorname{sen}\alpha + \frac{bc}{2}\cdot\operatorname{sen}\alpha \\ &= \frac{ad+bc}{2}\cdot\operatorname{sen}\alpha. \end{aligned}$$

Escrevendo (5) com $\frac{\alpha}{2}$ no lugar de α, obtemos

$$\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right) = 2\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Logo,

$$\begin{aligned} A(ABCD) &= \frac{ad+bc}{2}\cdot\operatorname{sen}\alpha \\ &= \frac{ad+bc}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ &= (ad+bc)\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right). \end{aligned}$$

Elevando ambos os membros da última igualdade ao quadrado, obtemos:

$$[A(ABCD)]^2 = (ad+bc)^2\cdot\operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right). \quad (8)$$

Por outro lado, aplicando a Lei dos Cossenos sucessivamente aos triângulos BAD e BCD, obtemos:

$$x^2 = a^2+d^2-2ad\cdot\cos\alpha$$

e

$$\begin{aligned} x^2 &= b^2+c^2-2bc\cdot\cos(180^{\text{o}}-\alpha) \\ &= b^2+c^2+2bc\cdot\cos\alpha \end{aligned}$$

(onde, na última equação, utilizamos a identidade $\cos(180^{\text{o}}-\alpha) = -\cos\alpha$). Daí, segue que

$$a^2+d^2-2ad\cdot\cos\alpha = b^2+c^2+2bc\cdot\cos\alpha,$$

igualdade que resolvida para $\cos\alpha$ fornece facilmente

$$\cos\alpha = \frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(ad+bc)}.$$

Agora, utilizando a identidade (6), obtemos:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{1-\cos\alpha}{2} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{4(ad+bc)} \\ &= \frac{2ad+2bc-a^2-d^2+b^2+c^2}{4(ad+bc)} \\ &= \frac{(b^2+c^2+2bc)-(a^2+d^2-2ad)}{4(ad+bc)} \\ &= \frac{(b+c)^2-(a-d)^2}{4(ad+bc)} \\ &= \frac{(b+c+a-d)(b+c-a+d)}{4(ad+bc)} \\ &= \frac{2(p-d)\cdot 2(p-a)}{4(ad+bc)} \\ &= \frac{(p-d)(p-a)}{ad+bc}. \end{aligned}$$

Analogamente, utilizando a identidade (7) e perfazendo algebrismos similares aos feitos acima, obtemos:

$$\begin{aligned} \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{1+\cos\alpha}{2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{4(ad+bc)} \\ &= \frac{(p-c)(p-b)}{ad+bc}. \end{aligned}$$

Finalmente, substituindo em (8) as expressões obtidas acima para $\operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ e $\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, ficamos com:

$$\begin{aligned}
[A(ABCD)]^2 &= (ad+bc)^2 \cdot \operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\
&= (ad+bc)^2 \cdot \frac{(p-c)(p-b)}{ad+bc} \cdot \frac{(p-d)(p-a)}{ad+bc} \\
&= \cancel{(ad+bc)^2} \cdot \frac{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}{\cancel{(ad+bc)^2}} \\
&= (p-a)(p-b)(p-c)(p-d).
\end{aligned}$$

Extraindo raízes quadradas, segue a fórmula de Brahmagupta:

$$A(ABCD) = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

$\square$

Dicas para o Professor

Recomendamos que sejam utilizadas pelo menos três sessões de 50min para expor todo o conteúdo deste material. Sugerimos aos professores que, antes de discutirem com seus alunos a prova da fórmula de Herão apresentada aqui, comentem com os mesmos sobre a outra demonstração, a qual consta do módulo "Leis dos Senos e dos Cossenos".

Explique com todos os detalhes as identidades trigonométricas utilizadas para mostrar a fórmula de Brahmagupta, pois elas serão muito úteis em outras ocasiões. Em particular, comente que elas serão retomadas de forma mais geral no módulo sobre Trigonometria, do primeiro ano do Ensino Médio.

Também é importante chamar a atenção dos alunos, através de exemplos, para o fato de que a fórmula de Brahmagupta não vale para quadriláteros em geral, isto é, não inscritíveis. Um exemplo simples é fornecido pelo trapézio retângulo de bases 3 e 7 e altura 3, o qual tem o outro lado não paralelo de medida 5.

As referências a seguir abordam o material aqui reunido em maior profundidade e trazem vários outros exemplos resolvidos e problemas propostos.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 2: Geometria Euclidiana Plana*. Rio de Janeiro, Editora S.B.M., 2013.

2. O. Dolce, J. N. Pompeo. *Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 9: Geometria Plana*. São Paulo, Editora Atual, 2013.