Material Teórico - Módulo Cônicas

Definições básicas

Terceiro Ano do Ensino Médio

Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

1 Introdução

Neste módulo iremos estudar certos tipos de curvas, denominadas *cônicas* (*não degeneradas*). Tais curvas podem ser de um dentre três tipos, todos bastante conhecidos: elipses, hipérboles e parábolas. Observamos que os círculos são tipos especiais de elipses, logo, também são cônicas.

O estudo das cônicas surgiu com Menêcmo (380-320 a.C.), um dos filósofos da Academia, de Platão, que por sua vez pode ser considerada a primeira universidade da História. O primeiro tratado sobre cônicas foi escrito por Pappus de Alexandria (320 d.C.). Entretanto, o primeiro a estudar cônicas com o auxílio de sistemas de coordenadas foi o francês Pierre de Fermart, apenas por volta de 1636. Ao fazê-lo, ele obteve uma equação da forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

que será estudada nas próximas aulas.

Seguindo a ordem dos acontecimentos históricos, vamos primeiramente apenas descrever de onde vêm as cônicas, antes de falar sobre suas equações dentro da Geometria Analítica. Antes ainda, vamos lembrar o que é uma superfície cônica de revolução.

> Uma **superfície cônica** (**de revolução**) é aquela obtida pela rotação de uma reta, chamada *geratriz*, em torno de um eixo que intersecta a reta (veja a Figura 1). O ponto de intersecção entre a geratriz e o eixo é chamado de *vértice* da superfície cônica.

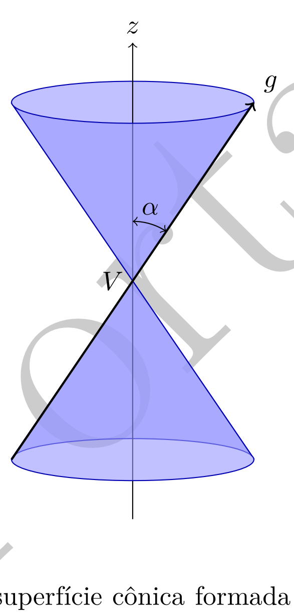

Figura 1: uma superfície cônica formada pela rotação da geratriz g em torno do eixo-z. A geratriz e o eixo se intersectam formando um angulo α.

Veja que, ao realizarmos a rotação da geratriz em torno do eixo, cada ponto da mesma (com exceção do vértice) descreve um círculo com centro no eixo e contido em um plano perpendicular ao eixo.

Observamos que uma superfície cônica é uma figura *ilimitada* (uma vez que a geratriz é infinita). Sendo assim, ao desenhá-la estamos exibindo apenas um pedaço da mesma. Veja também que o vértice claramente divide a superfície em duas partes, cada uma das quais é chamada de **folha** da superfície cônica.

Em nosso dia a dia nos deparamos com várias superfícies cônicas (ou melhor, cortes delas). Por exemplo, em casquinhas de sorvete ou nos cones usados para sinalização de trânsito.

> Uma *curva cônica não degenerada*, ou simplesmente uma **cônica não degenerada**), é uma curva obtida pela interseção de um plano com uma superfície cônica, quando o plano não passa pelo vértice da superfície nem contém uma geratriz da mesma.

Vamos chamar de α o ângulo formado entre a geratriz e o eixo da superfície e de β o ângulo formado entre o plano e o eixo, ambos tomados entre 0 e 90 graus. A forma que a cônica admite pode ser classificada de acordo com a relação entre os valores de α e β, gerando em cada caso as formas características da parábola, hipérbole e elipse. Mais precisamente:

(A) Quando $\beta = \alpha$ a interseção descrita acima é uma **parábola**.

(B) Quando $\beta > \alpha$ a interseção descrita acima é uma **elipse**. Se adicionalmente $\beta = 90°$, então a curva será um círculo.

(C) Quando $\beta < \alpha$ a interseção descrita acima é uma **hipérbole**.

A Figura 2 mostra todos os casos acima[1].

Temos, ainda, a possibilidade da interseção entre um plano e uma superfície cônica não ser uma cônica não degenerada. Estes são os casos que chamamos de **degenerados**. Mais precisamente, quando o eixo da superfície é uma reta que pertence ao plano de corte, então a intersecção entre eles será a união de duas retas concorrentes. Quando $\beta = \alpha$ e a geratriz é uma reta que pertence ao plano de corte, então a interseção será apenas uma reta. É possível também que a interseção entre o plano e a superfície seja apenas o vértice.

Nos materiais subsequentes sobre cônicas, e quando não houver perigo de confusão, sempre que nos referirmos a uma *cônica* sem qualificação adicional, ficará subentendido que se trata de uma cônica não degenerada.

[1] Fonte: User:Pbroks13, via Wikimedia Commons.

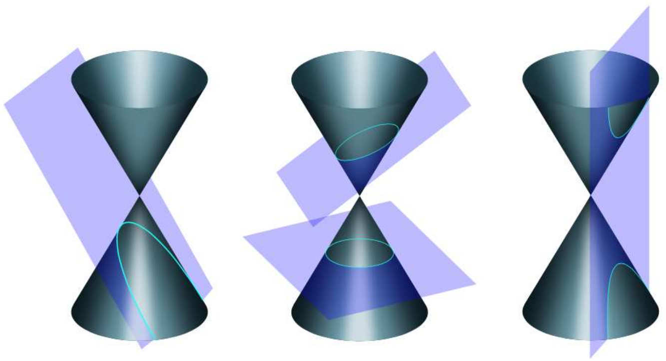

Figura 2: interseções de um plano com um cone de duas folhas, formando cônicas. Esquerda: parábola. Centro: elipse e círculo. Direita: hipérbole.

Dicas para o Professor

O conteúdo desta aula pode ser coberto em um encontro de 50 min. O objeto é apenas motivar o estudo de elipses, hipérboles e parábolas que será feito nas aulas seguintes. Contudo, nas aulas seguintes veremos definições alternativas e independentes para cada uma dessas curvas no plano, sem a necessidade de olharmos para um cone em três dimensões. É possível provar que as interseções de planos com cones geram curvas que realmente satisfazem as definições que iremos estudar nas próximas aulas. Contudo, de início não iremos fazer tais demonstrações aqui. O leitor interessado pode consultar a referência [1].

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Geometria*. Coleção PROFMAT. SBM, Rio de Janeiro, 2013.