Material Teórico - Aplicações das Técnicas Desenvolvidas

Professor, onde foi que eu errei?

Segundo Ano do Ensino Médio

Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

17 de maio de 2019

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Erros comuns em problemas de contagem

Não são raras as situações em que se tenta realizar certa contagem com um argumento que *parece* estar correto mas obtém-se o valor errado. Nesta aula, abordamos alguns erros comuns ao se tentar resolver problemas de contagem; situações análogas, envolvendo problemas de probabilidade, serão vistas no módulo "*Probabilidade - Miscelânea de Exercícios*".

Para esta aula, lembre-se de que, nos módulos anteriores, definimos:

$$\begin{aligned} P_n &= n! = n(n-1)\cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1, \\ PC_n &= (n-1)!, \\ C_{n,r} &= \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}, \end{aligned}$$

como, respectivamente, o número de permutações de n objetos, permutações circulares de n objetos e combinações de n objetos, tomados r a r. Nos problemas a seguir, vamos chamar de "configuração" o resultado final de uma série de escolhas que corresponde a um objeto que satisfaz as propriedades do enunciado. Assim, em cada problema o objetivo será contar o número de configurações.

Exemplo 1. *Quantas comissões de* 5 *pessoas, contendo pelo menos duas mulheres, podemos escolher de um grupo de* 8 *homens e* 3 *mulheres.*

Solução errada. O número de maneiras é:

$$C_{3,2} \cdot C_{9,3} = 3 \cdot \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2} = 252.$$

A ideia da "solução" acima é primeiramente escolher 2 das 3 mulheres para a comissão, o que pode ser feito de $C_{3,2}$ maneiras. Uma vez feito isso, do total das 11 pessoas sobrarão 9 que ainda não foram escolhidas, dentre as quais precisamos escolher outras 3 pessoas para a comissão. A "ideia" é que dentre essas outras 3 pessoas não importa se haverá ou não outra mulher. Essa solução está errada, pois, conforme veremos, ela conta uma mesma configuração mais de uma vez. □

Solução correta. Dividimos o problema em dois casos: ou escolhemos exatamente 2 mulheres ou escolhemos exatamente 3 mulheres.

O número de comissões com exatamente 2 mulheres é:

$$C_{3,2} \cdot C_{8,3} = 3 \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} = 168,$$

pois primeiro escolhemos 2 das 3 mulheres e, para cada uma dessas escolhas, escolhemos 3 dos 8 homens para completar a comissão.

O número de comissões com exatamente 3 mulheres é

$$C_{3,3} \cdot C_{8,2} = 1 \cdot \frac{8 \cdot 7}{2} = 28,$$

pois só há uma maneira de escolher 3 mulheres (dentre as 3 do grupo) e, feito isso, devemos escolher 2 homens dentre os 8 para completar a comissão.

Ao todo, temos um total de $168 + 28 = 196$ comissões. □

Outra solução correta. Dentre o total de maneiras de formar comissões com 5 pessoas quaisquer, que é igual a $\binom{11}{5}$, vamos subtrair a quantidade de comissões que não possuem nenhuma mulher ou que possuem uma única mulher. O resultado obtido é

$$C_{11,5} - C_{8,5} - C_{3,1} \cdot C_{8,4} = 196.$$

□

Análise do erro. Vamos tentar entender o que deu errado na primeira "solução". Para isso, vamos mostrar que algumas comissões, mais especificamente aquelas que possuem 3 mulheres, estão sendo contadas mais de uma vez no cálculo da solução errada.

Lembre-se de que a ideia da solução errada era primeiro escolher 2 das 3 mulheres e depois escolher 3 pessoas para completar a comissão. Considere o caso em que o resultado foi uma comissão composta por 3 mulheres e 2 homens, digamos $\{M_1, M_2, M_3, H_1, H_2\}$. Essa comissão pode ter sido formada primeiro selecionando as mulheres M_1, M_2 e, em seguida, selecionado as três pessoas M_3, H_1, H_2 (dentre as 9 restantes); também pode ter sido formada selecionando primeiro as mulheres M_1, M_3 e, em seguida, as pessoas M_2, H_1, H_2; por fim, também pode ter sido formada selecionando primeiro as mulheres M_2, M_3 e, em seguida, as pessoas M_1, H_1, H_2. Dessa forma, cada comissão desse tipo (formada por 3 mulheres e 2 homens) foi contabilizada três vezes, enquanto deveria ter sido contada apenas uma vez.

Para corrigir esse erro, não podemos simplesmente dividir o total obtido (252) por três, pois as comissões que possuem apenas duas mulheres não foram contados três vezes. O que podemos fazer é subtrair da resposta errada (252) duas vezes o número de comissões que possuem exatamente três mulheres. O número de tais comissões é $C_{3,3} \cdot C_{8,2} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$, pois só há uma forma de escolher todas as 3 mulheres e há $C_{8,2}$ de escolher os 2 homens. Dessa forma, a quantidade correta de comissões é

$$252 - 2 \cdot 28 = 196,$$

como havíamos obtido nas outras duas soluções. □

Resumo. Ao calcular o número de maneiras de como montar uma comissão, devemos tomar cuidado para que uma mesma comissão não seja contabilizada de várias maneiras diferentes. Em geral, tenha *cuidado para não contar alguns dos objetos em questão repetidas vezes.*

Exemplo 2 (AFA). *Uma prova consta de* 3 *partes, cada uma com* 5 *questões. Cada questão, independentemente* *da parte a que pertença, vale 1 ponto, sendo o critério de correção "certo ou errado". O número de maneiras diferentes de se alcançar 10 pontos nessa prova, se devem ser resolvidas pelo menos 3 questões de cada parte e 10 questões no total, é igual a:*

(a) 1500. | *(b)* 150. | *(c)* 75. | *(d)* 1600.

Observações. Por "critério de correção certo ou errado" entende-se que não é possível acertar apenas parte de uma questão, ou seja, em cada questão só é possível obter 0 ou 1 ponto. Além disso, neste problema deve-se considerar que "alcançar 10 pontos" significa acertar *exatamente* 10 questões. Por fim, a palavra "resolvida" deve ser interpretada como "acertada".

Solução errada. O número de maneiras é:

$$C_{5,3} \cdot C_{5,3} \cdot C_{5,3} \cdot 6 = 10^3 \cdot 6 = 6000.$$

A ideia deste argumento é escolher primeiro 3 questões de cada uma das partes, para garantir que a restrição do problema seja satisfeita. Feito isso, teremos escolhido 9 questões, de sorte que precisaremos escolher mais uma para completar as 10; essa última questão deve ser escolhida dentre as 6 questões restantes. Contudo, veja que o número 6000 não consta entre as opções de resposta para o problema. □

Solução correta. Devemos contar de quantos modos podemos escolher exatamente 10 questões (para resolver), seguindo as restrições do enunciado.

Inicialmente, note que, como há 3 partes na prova e de cada parte devemos escolher pelo menos 3 questões, para fazer 10 pontos sempre haverá uma parte com exatamente 4 questões corretas e outras duas partes com exatamente 3 questões corretas. Assim, para resolver o problema, começamos escolhendo uma das três partes para ser a parte onde resolveremos 4 questões; é claro que isso pode ser feito de $C_{3,1} = 3$ maneiras. Em seguida, basta selecionarmos 4 questões da parte já escolhida e 3 questões de cada uma das duas outras partes. Isso nos dá um total de:

$$3 \cdot C_{5,4} \cdot C_{5,3} \cdot C_{5,3} = 3 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 10 = 1500 \text{ maneiras.}$$

Logo, a alternativa correta é a de letra (a). □

Análise do Erro. Vamos seguir o método sugerido na solução errada para construir um conjunto de 10 questões. Primeiramente, escolhe-se 3 questões da Parte Um, digamos as questões P_1, P_2, P_3; em seguida, escolhe-se 3 questões da Parte Dois, digamos S_1, S_2, S_3 e 3 questões da Parte Três, digamos T_1, T_2, T_3; por fim, precisamos, ainda, escolher a décima questão, dentre as 6 que sobraram. Sem perda de generalidade, suponhamos que a décima questão pertença à Parte Um da prova, e vamos chamá-la de P_4. Com isso, temos o conjunto

$$A = \{P_1,P_2,P_3,P_4,S_1,S_2,S_3,T_1,T_2,T_3\}$$

de questões corretas (escolhidas).

Afirmamos que esse mesmo conjunto foi contabilizado quatro vezes na solução errada. De fato, poderíamos começar escolhendo P_1, P_2, P_4 da Parte Um e as mesmas questões das partes dois e três, e terminar escolhendo P_3 como a última questão para formar nosso conjunto A. Analogamente, para cada maneira de escolher 3 questões dentre P_1, P_2, P_3, P_4, temos uma maneira diferente de descrever o conjunto A (seguindo exatamente o tipo de descrição sugerida na resolução errada do problema). Com isso, cada conjunto foi contado de $C_{4,3} = 4$ maneiras.

Por isso, a quantidade correta de conjuntos é

$$\frac{6000}{4} = 1500,$$

conforme obtido na solução correta. □

Resumo. Dessa vez, a solução errada também contou configurações em excesso. Mas, como cada configuração havia sido contada exatamente 4 vezes, a fim de corrigir a contagem por excesso bastou dividir o número obtido por 4.

Exemplo 3. *Um grupo de 8 pessoas vai formar uma roda para brincar. De quantas maneiras elas podem se organizar, sabendo que as pessoas "A", "B" e "C" não podem ficar juntas ("A" não pode ficar ao lado nem de "B" nem de "C" e "B" não pode ficar ao lado de "C").*

Solução errada. Considere a seguinte resposta:

$$\begin{aligned} PC_8 - C_{3,2} \cdot P_2 \cdot PC_7 + 2\,P_3 \cdot PC_6 &= \\ &= 7! - 3 \cdot 2 \cdot 6! + 2 \cdot 3! \cdot 5! \\ &= 5040 - 4320 + 1440 \\ &= 2160. \end{aligned}$$

Para entender como foi pensado o cálculo acima, vamos chamar as pessoas A, B e C de *especiais*. Consideramos todas as permutações circulares das 8 pessoas (PC_8). Certamente estamos contando em excesso, pois várias dessas permutações não satisfazem o enunciado. Vamos, então, subtrair as configurações em que duas das pessoas especiais aparecem juntas. Daí, escolhemos duas pessoas especiais de $C_{3,2}$ maneiras e uma ordem entre elas de P_2 maneiras (de forma equivalente, tomamos um arranjo de duas pessoas especiais). Formamos um bloco com as duas pessoas escolhidas e as tratamos como se fossem uma única pessoa, assim obtendo, em cada caso, PC_7 permutações circulares que não são válidas. Por isso, subtraímos $C_{3,2} \cdot P_2 \cdot PC_7$ do total. Feito isso, lembramos que há configurações em que as três pessoas especias apareciam juntas e estas configurações foram subtraídas mais de uma vez. Para o que segue, a ideia foi pensar que tais configurações foram subtraídas 3 vezes (uma para AB, uma para AC e uma para BC) quando deveriam ter sido subtraídas apenas 1 vez. Para compensar, somamos 2 vezes o número de configurações em que ABC aparecem juntas (em alguma ordem). Há P_3

possibilidades para definir uma ordem entre A, B e C. Em seguida, pensando no bloco formado pelas pessoas especiais como uma única pessoa, temos PC_6 permutações circulares de cada tipo. Por isso que somamos $2P_3 \cdot PC_6$. $\square$

Solução correta. Na análise abaixo, justificamos que a resposta correta é:

$$PC_8 - C_{3,2} \cdot P_2 \cdot PC_7 + P_3 \cdot PC_6 = 1440. \qquad \square$$

Análise do erro. A ideia inicial da solução errada está correta: podemos começar com o total de permutações circulares e subtrair aquelas em que duas das três pessoas especiais estão juntas.

O problema foi apenas dizer que durante a subtração cada configuração em que A, B e C aparecem juntas havia sido subtraída três vezes. Na verdade, cada uma de tais configurações foi subtraída apenas duas vezes. Por exemplo, considere uma certa permutação circular σ em que aparece o bloco ABC, nesta ordem, seguido de qualquer permutação das demais cinco pessoas. Dentre as $C_{3,2} \cdot P_2 \cdot PC_7$ configurações subtraídas, a permutações σ foi contabilizada entre aquelas em que A e B aparecem juntas (e nessa ordem), bem como entre aquelas em que B e C aparecem juntas (e nessa ordem), mas não foi contabilizada entre aquelas em que A e C aparecem juntas.

Com isso, cada configuração em que as três pessoas especiais estão juntas foi subtraída duas vezes, quando deveria ter sido subtraída apenas uma vez. Portanto, para compensar a contagem em excesso, basta somar *uma única vez* $P_3 \cdot PC_6$. Isso, resulta no cálculo correto:

$$PC_8 - C_{3,2} \cdot P_2 \cdot PC_7 + P_3 \cdot PC_6 = 1440.$$

Vejamos mais uma maneira (alternativa) de conferir que as configurações onde as três pessoas especiais estão juntas foram subtraídas apenas duas vezes. Escreva todas as $C_{3,2} \cdot P_2$ maneiras de escolher e ordenar duas pessoas especiais:

$$\underline{AB}, \quad \underline{BA}, \quad \underline{AC}, \quad \underline{CA}, \quad \underline{BC}, \quad \underline{CB}.$$

Para cada uma dessas seis maneiras, há duas maneiras de formar um bloco em que as três pessoas especiais aparecem juntas: acrescentando a terceira pessoa à esquerda ou à direta. Temos então as doze possibilidades:

$$\begin{array}{cccccc} \underline{AB}C, & \underline{BA}C, & \underline{AC}B, & \underline{CA}B, & \underline{BC}A, & \underline{CB}A \\ C\underline{AB}, & C\underline{BA}, & B\underline{AC}, & B\underline{CA}, & A\underline{BC}, & A\underline{CB}. \end{array}$$

Na lista obtida acima, veja que cada sequência (ordenada) de A, B e C aparece exatamente duas vezes (realçamos as repetições com uma mesma cor). $\square$

Resumo. A ideia da solução inicial era fazer uso do chamado *Princípio da Inclusão-Exclusão* (veja, por exemplo, a referência [1]). Contudo, pode não ser simples utilizar esse princípio no caso de permutações circulares, e deve-se tomar muito cuidado ao tentar descobrir quantas vezes cada tipo de configuração está sendo contada. Em particular, os coeficientes que usualmente apareceriam ao aplicar o Princípio da Inclusão-Exclusão em outras situações podem precisar ser modificados. Esse problema não se restringe a permutações circulares, podendo acontecer em outras situações em que o princípio é aplicado.

Solução alternativa 1 (correta). Há uma maneira mais simples de resolver o problema original, sem a necessidade de contar o total de permutações e subtrair as indesejadas.

Vamos primeiro montar uma roda provisória com as pessoas não especiais, ou seja, apenas com as pessoas diferentes de A, B e C. Isso pode ser feito de PC_5 maneiras. Para cada uma dessas rodas provisórias, vamos encaixar A, B e C entre uma pessoa e outra. Veja que há 5 espaços nos quais podemos encaixá-las, mas, como A, B e C não podem ser vizinhas, cada uma deles deve ocupar um espaço diferente. Assim, há 5 possíveis locais para encaixar A, feito isso sobram 4 locais para encaixar B e, depois, 3 espaços para encaixar C. Com isso, temos um total de

$$PC_5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 1440 \text{ configurações.} \qquad \square$$

Observe que, como distribuímos as pessoas A, B e C *após* distribuirmos as outras cinco pessoas na roda, não é suficiente escolher 3 das 5 posições disponíveis para alocar A, B e C. Isso poderia ser feito de $C_{5,3} = 10$ maneiras, mas, após fazê-lo, as distribuições de A, B e C como ABC, ACB, BAC, BCA, CAB ou CBA dão rodas distintas. Então, o correto é multiplicar PC_5 por $10 \cdot 6$, o que é o mesmo que $5 \cdot 4 \cdot 3$.

Solução alternativa 2 (correta). Essa solução usa utiliza estratégia semelhante à da solução anterior, mas requer um pouco mais de conhecimento. Dessa vez, vamos começar montando um roda provisória que contém apenas A, B e C. Isso pode ser feito de PC_3 maneiras. Agora, vamos distribuir as demais 5 pessoas nos espaços entre A, B e C, lembrando que deve haver pelo menos uma pessoa em cada um desses espaços! Vamos chamar de x o número de pessoas que serão colocadas entre C e A, de y o número de pessoas entre A e B, e de z o número de pessoas entre B e C. Primeiro, devemos contar de quantas maneiras podemos escolher (x, y, z). Veja que $x + y + z = 5$ e x, y e z são inteiros maiores ou iguais a 1. Há vários problemas desse tipo na aula sobre combinações completas do Módulo "Métodos Sofisticados de Contagem". A resposta é que existem $C_{4,2} = 6$ escolhas para (x, y, z). Para cada uma dessas 6 escolhas, cada permutação das 5 pessoas não especiais nos dá uma configuração para a roda final. Logo, a quantidade de rodas que satisfaz o enunciado é:

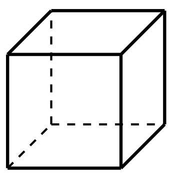
$$PC_3 \cdot 6 \cdot P_5 = 2 \cdot 6 \cdot 5! = 1440.$$

$\square$

O último problema que examinamos é natural e a solução errada que apresentamos é comumente encontrada no dia a dia dos professores.

Exemplo 4. *De quantos modos podemos colorir as faces de um cubo dispondo de* 6 *cores diferentes, sabendo que cada face deve ter uma única cor e que não devemos repetir cores?*

Solução errada. Vamos pensar no cubo com as faces desenhadas como abaixo e pensar nas faces de cima e de baixo como bases.



Temos $C_{6,2}$ maneiras de escolher as cores para as bases (a ordem entre elas não importa, pois, se virarmos o cubo de cabeça para baixo obtemos o mesmo cubo) e PC_4 maneiras de colorir as faces laterais (onde usarmos PC_4 no lugar de P_4 pois podemos rotacionar o cubo em torno do eixo vertical). Isso nos dá um total de

$$C_{6,2} \cdot PC_4 = \frac{6 \cdot 5}{2} \cdot 3! = 15 \cdot 6 = 90$$

maneiras. □

Solução correta. Veja que, antes de inciar a coloração, não há nada que permita distinguir uma face da outra. A distinção entre o que é base e o que é face lateral em um cubo é criada apenas por conta da direção em que o leitor o está visualizando.

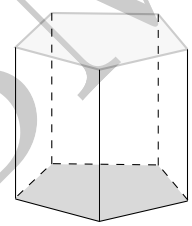
Assim, ao invés de centrar nossa atenção nas faces do cubo, vamos nos concentrar nas cores, escolhendo uma delas como ponto de referência. Digamos que uma das 6 cores utilizadas seja verde. Então, a cor verde será a primeira que utilizaremos, podendo pintar qualquer face (não importando qual, pois todas as faces são idênticas). Depois de pintar uma face de verde, há 5 possíveis cores que podem ser usadas na face oposta à face verde (essa face é especial, pois só existe uma face oposta à face verde). Depois disso, por conta das rotações do cubo em torno do seu eixo de simetria perpendicular à face verde, as 4 cores restantes podem ser distribuídas de PC_4 maneiras. Veja que não há necessidade de dividir esse número por 2, pois se as 4 cores forem atribuídas para as faces numa determinada ordem em sentido horário, gera-se uma coloração diferente de quando a mesma ordem for usada no sentido anti-horário (por conta da assimetria entre a cor verde e a cor usada na face oposta à verde). Com isso, temos um total de

$$1 \cdot 5 \cdot PC_4 = 5 \cdot 3! = 5 \cdot 6 = 30$$

colorações. □

Análise do erro. O problema com a contagem da solução incorreta sucedeu pelo fato de o cubo possuir várias simetrias além das que lá foram levadas em consideração: qualquer face pode ser tomada como base. Então, além de trocar as cores da face superior e inferior ou de rotacionar o cubo em torno do eixo vertical, há outros movimentos (como rotações e reflexões em torno dos outros eixos e rotações – de 120° – em torno das diagonais) que fazem com que estejamos contando uma mesma coloração várias vezes. Contudo, não é muito simples observar a solução errada e tentar calcular diretamente quantas vezes cada coloração está sendo repetida. Por isso, nossa solução correta simplesmente propõe-se a realizar a contagem de outra forma.

Veja que o erro em que a solução errada incorreu não existiria se tivéssemos, no lugar do cubo, um prisma pentagonal reto (como o da figura abaixo) e sete cores distintas (uma para cada face). Aqui, as bases estão bem definidas pelo próprio sólido e não pela direção em que ele é desenhado.



Resolvemos esse problema na aula sobre permutações circulares do Módulo "Métodos Sofisticados de Contagem", obtendo a resposta (correta)

$$C_{7,2} \cdot PC_5 = \frac{7 \cdot 6}{2} \cdot 4! = 21 \cdot 24 = 504.$$

□

Dicas para o Professor

Este módulo complementa os módulos anteriores sobre contagem. Soluções incorretas, como as que são discutimos aqui, são muito comuns entre os alunos e, mesmo, professores. Caso um aluno resolva um problema incorretamente, encontrando um valor numérico diferente da resposta oficial, é importante que ele não apenas aceite que o número obtido está errado, mas também perceba qual erro, em seu raciocínio, o levou a tal valor errado; só assim ele pode evitar cometer novamente o mesmo erro. Assim, sugerimos fortemente ao professor reservar um tempo para discutir soluções incorretas, apostando que os alunos aprenderão com elas pelo menos tanto quanto com as soluções corretas. Nesse sentido, vale lembrar que, quase sempre, problemas de Combinatória (e, conforme veremos, também de Probabilidade) possuem mais de uma solução. Dessa forma, caso haja dúvidas sobre o raciocínio empregado na obtenção de uma solução, é interessante buscar uma maneira alternativa de resolver o mesmo problema, a fim de conferir o valor numérico obtido.

Sugerimos que o conteúdo desta aula seja abordado em um ou dois encontros de 50 minutos, de acordo com o grau de amadurecimento da turma em relação a problemas de contagem.

Para além dos exemplos discutidos aqui, a referência [1] traz muitos outros problemas que o professor pode utilizar para compor "soluções" incorretas, as quais podem ajudar a explicar aos alunos porque as contagens correspondentes pecam por falta ou por excesso.

Sugestões de Leitura Complementar

1. P. C. P. Carvalho, A. C. de O. Morgado, P. Fernandez e J. B. Pitombeira. *Análise Combinatória e Probabilidade.* SBM, Rio de Janeiro, 2000.