Material Teórico - Módulo Equações Algébricas - Raízes e Coeficientes

Fórmula Resolutiva para Equações do Segundo e Terceiro Graus

Terceiro Ano do Ensino Médio

Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

31 de Janeiro de 2022

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Introdução

Nesta aula, estudaremos as formulas resolventes para equações polinomiais de segundo e de terceiro graus. Assim, obteremos expressões que nos permitem calcular de modo direto às raízes em função dos coeficientes do polinômio.

2 Equações de segundo grau

Vamos revisar rapidamente como obter a fórmula resolvente de equações polinomiais de segundo grau. Esta fórmula é conhecida popularmente como "fórmula de Bhaskara". Na verdade, ela foi apenas popularizada por Bhaskara, um matemático Indu, no Século XII. Mas acredita-se ter sido desenvolvida por um matemático, também Indu, chamado Sridhara, no Século X.

Para obter a fórmula, basta usar o método de completamento de quadrados. Para uma introdução mais detalhada a tal método, recomendamos a leitura do módulo "Equações do Segundo Grau" do Nono Ano do Ensino Fundamental. Aqui, vamos apenas aplicá-lo diretamente.

Considere uma equação de segundo grau escrita na forma abaixo:

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{1}$$

onde a, b e c são reais dados, sendo $a \neq 0$.

Como $a \neq 0$, podemos dividir ambos os lados de (9) por a. (Isso tornará mais fácil completar quadrados.) Assim fazendo, temos que:

$$x^2 + \left(\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a} = 0$$

ou, ainda,

$$x^2 + \left(\frac{b}{a}\right)x = -\frac{c}{a}.$$

Para completar o trinômio quadrado perfeito do lado esquerdo, basta somar $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$. Fazendo isso em ambos os lados (a fim de não alterar a equação), obtemos sucessivamente:

$$\begin{aligned} x^2 + 2\left(\frac{b}{2a}\right)x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 &= \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}, \\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}, \\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}. \end{aligned}$$

Para tornar esta expressão mais curta, é costume denotar o termo $b^2 - 4ac$ pela letra grega delta maiúscula, cujo símbolo é Δ. Assim, escrevemos

$$\Delta = b^2 - 4ac. \tag{2}$$

Esse valor de delta é também conhecido como o **discriminante** da equação do segundo grau (9). Com o auxílio do mesmo, a equação reduz-se agora a

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}. \tag{3}$$

Como o lado esquerdo da equação (3) é não negativo para todo valor real de x, e como $4a^2$ é sempre positivo, se o valor de Δ for negativo, concluímos que nenhum valor real de x irá satisfazer a equação (3). Sendo assim, nesse caso a equação original também não terá soluções reais.

Agora, quando $\Delta \geq 0$, podemos reescrever (3) como

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2, \tag{4}$$

de sorte que

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

No primeiro caso obtém-se:

$$x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a},$$

ao passo que, no segundo, obtém-se

$$x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Para facilitar a memorização, os dois casos acima são escritos em uma única linha com o sinal $\pm$. Observe que, quando $\Delta = 0$, esses dois valores coincidem.

Resumimos a discussão acima no quadro a seguir:

> Se $\Delta \geq 0$, as soluções reais da equação
>
> $$ax^2 + bx + c = 0,$$
>
> onde $a \neq 0$, podem ser obtidas pela fórmula:
>
> $$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ onde } \Delta = b^2 - 4ac.$$

Observação 1. *Já vimos que a equação não possui soluções reais quando $\Delta < 0$. Também conforme observamos acima, no caso em que $\Delta = 0$ os dois valores obtidos para x serão (reais e) iguais, e a equação possui apenas uma solução real. Ainda nesse caso, dizemos que a equação possui uma raiz (real)* dupla*. Por fim, quando $\Delta > 0$, a equação possui (exatamente) duas soluções/raízes reais distintas.*

3 Equações de terceiro grau

O propósito desta seção é encontrar um fórmula para as raízes de equações polinomiais de terceiro grau. Começaremos analisando um caso particular, limitando-nos a resolver equações em que o coeficiente do termo quadrático é igual a zero; em seguida, prosseguiremos para o caso geral.

3.1 Coeficiente quadrático nulo

Nesta subseção, além de considerar equações polinomiais de terceiro grau com coeficiente do termo quadrático igual a zero, também assumiremos, sem perda da generalidade, que o coeficiente de x^3 é igual a 1. Assim, queremos resolver uma equação do seguinte tipo:

$$\boxed{x^3 + px + q = 0.} \tag{5}$$

Aqui, p e q são os coeficientes da equação (constantes dadas) e x é nossa incógnita. Assim, nosso objetivo é encontrar os possíveis valores de x, escrevendo-os como uma função direta dos coeficientes p e q.

Se $q = 0$, então a equação resume-se a

$$x^3 + px = 0;$$

como $x^3+px = x(x^2+p)$, concluímos que $x = 0$ ou $x^2+p = 0$, e sabemos analisar essa última possibilidade.

Se $q \neq 0$, façamos a substituição

$$x = u - \frac{p}{3u}$$

e analisemos a equação em u assim obtida, qual seja,

$$\left(u - \frac{p}{3u}\right)^3 + p\left(u - \frac{p}{3u}\right) + q = 0.$$

Usando produtos notáveis para expandir o cubo do primeiro membro, temos:

$$\begin{aligned}\left(u^3 - 3u^2\frac{p}{3u} + 3u\frac{p^2}{9u^2} - \frac{p^3}{27u^3}\right) + pu - \frac{p^2}{3u} + q &= 0,\\ u^3 - \cancel{up} + \frac{\cancel{p^2}}{\cancel{3}u} - \frac{p^3}{27u^3} + \cancel{pu} - \frac{\cancel{p^2}}{\cancel{3}u} + q &= 0,\\ u^3 - \frac{p^3}{27u^3} + q &= 0. \qquad (6)\end{aligned}$$

Multiplicando a última equação por u^3 obtemos:

$$u^6 + qu^3 - \frac{p^3}{27} = 0,$$

em que p e q são conhecidos.

Agora, temos uma equação bastante simples, que pode ser resolvida pela substituição $u^3 = z$. Isso nos dá a equação de segundo grau

$$z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0, \tag{7}$$

na variável z, a qual pode ser resolvida pela fórmula de Bhaskara. Temos que:

$$z = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}.$$

A expressão acima pode ser simplificada para:

$$u^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

ou, alternativamente,

$$u^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

Observe que o lado direito está dado em função de p e q e há dois possíveis valores para ele, a depender do sinal "$\pm$" ser substituído por "$+$" ou "$-$". Veja, ainda, que em cada um destes dois casos, no universo dos complexos, existem três possíveis valores de u que satisfazem a expressão (as raízes cúbicas complexas do lado direito da equação). Encontrando cada um deles e substituindo na expressão $x = u - \frac{p}{3u}$, obtemos os possíveis valores de x. Isso pode ser bastante trabalhoso, pois no processo seria necessário calcular $1/u$. Vamos usar uma estratégia para simplificar esses cálculos.

Seja $v = -p/(3u)$, de modo que $x = u + v$. Já sabemos que u^3 é uma das raízes da equação (7) e o produto de tais raízes é $-p^3/27$. Assim, a outra raiz desta equação é justamente o número $\frac{-p^3}{27u^3}$, que é igual a v^3. Logo, se

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3},$$

então

$$v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3},$$

e vice-versa (ou seja, quando usamos o sinal de "$-$" antes da raiz quadrada da expressão dada para u^3, usamos o sinal de "$+$" na posição análoga para v^3). Como $x = u + v$, em ambos os casos podemos escrever

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

A fórmula acima é conhecida como **fórmula de Cardano**, e já chegamos a utilizá-la e a contar histórias sobre ela no módulo "Números Complexos-Forma Algébrica" do Terceiro Ano do Ensino Médio.

Apesar da expressão em si não ser tão difícil de memorizar, utilizá-la ainda é algo bastante trabalhoso, pois é preciso observar que cada uma das raízes cúbicas devem ser resolvidas como raízes cubicas complexas. Assim, há 3 possíveis valores para cada uma delas, para um total de 9 *possíveis* soluções. Contudo, a equação original possui apenas 3 soluções, de modo que dentre essas 9 possibilidade algumas podem ser inválidas (é necessário que toda solução seja um desses 9 números, mas nem todos eles precisam ser solução). De fato, para cada uma das raízes complexas do primeiro radical, apenas uma das raízes complexas do segundo radical gera uma solução válida para a equação original (aquela que satisfaz $v = -p/(3u)$).

No caso em que p e q são reais e $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0$, a fórmula pode ser bastante útil para achar pelo menos um raiz real (considerando as raízes cúbicas reais). Em seguida, podemos dividir o polinômio original por $x - r$, onde r é a raiz encontrada, para encontrar as demais raízes resolvendo uma equação de segundo grau.

Lembre-se de que, quando p e q são reais, a equação sempre possui pelo menos uma raiz real. Porém, o número $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ pode ser negativo (ou mesmo não real, no caso em que p ou q não sejam reais), o que faz com que $-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ seja um complexo não real. Além disso, se $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ for negativo, teremos mais trabalho ao calcular suas raízes cúbicas.

Em problemas específicos, ao invés de aplicar a fórmula de Cardano, acaba sendo mais conveniente buscar raízes usando heurísticas, como temos feitos em módulos anteriores (como o teste das raízes racionais, no caso de p e q serem racionais); pode-se, também, usar métodos computacionais para encontrar aproximações, ou métodos baseados em ideias do Cálculo Diferencial (não estudados aqui).

3.2 Coeficiente quadrático não nulo

Para resolver uma equação de terceiro grau qualquer, vamos usar uma mudança de variáveis para reduzir o problema ao caso da subseção anterior.

Considere a equação

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \tag{8}$$

em que $a \neq 0$. Dividindo ambos os lados por a, obtemos:

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0,$$

ou seja, temos uma equação da forma

$$x^3 - Sx^2 + Tx - P = 0. \tag{9}$$

CUIDADO: deliberadamente, usamos sinais alternados nos coeficientes da expressão acima. Veja que, pelas relações de Girard (veja o módulo Equações Algébricas-Propriedades das Raízes), temos que $S = -\frac{b}{a}$ é a soma das raízes da equação $x^3 - Sx^2 + Tx - P = 0$ enquanto P é o produto delas.

Mostraremos como eliminar o termo $-Sx^2$ fazendo uma mudança de variável. Vejamos como através de um exemplo.

Exemplo 2. *Resolva a equação de terceiro grau*

$$x^3 - 6x^2 + 4x + 1 = 0$$

Solução. Pelas relações de Girard, temos que a soma das raízes (complexas) da equação é dada por:

$$S = -\frac{-6}{1} = 6.$$

Precisamos de uma mudança de variável que faça com que na nova equação o termo quadrático seja zero, ou seja, a soma das raízes seja zero. Uma maneira de fazer isso é tomando

$$z = x - 2.$$

Isso porque, sendo x_1, x_2, x_3 as raízes da equação original e $z_1 = x_1 - 2$, $z_2 = x_2 - 2$, $z_3 = x_3 - 2$, o a igualdade $2 = S/3$ fornece

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 + z_3 &= (x_1 - 2) + (x_2 - 2) + (x_3 - 2) \\ &= x_1 + x_2 + x_3 - 6 \\ &= S - 6 = 0. \end{aligned}$$

Assim, a equação em z, obtida a partir da equação dada pela substituição $x = z + 2$, terá coeficiente de z^2 igual a 0.

Realmente, fazendo $x = z + 2$ e usando um pouco de álgebra elementar, obtemos

$$\begin{aligned} x^3 - 6x^2 + 4x + 1 &= (z + 2)^3 - 6(z + 2)^2 + 4(z + 2) + 1 \\ &= z^3 - 8z - 7. \end{aligned}$$

Resta resolver a equação reduzida

$$z^3 - 8z - 7 = 0.$$

Para tanto, o mais simples seria usar o teste das raízes racionais para concluir que -1 é uma de suas raízes; em seguida, dividindo z^3-8z-7 por $z+1$ e encontrando as raízes do trinômio de segundo grau assim obtido, concluiríamos que os três possíveis valores de z são -1, $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}$ e $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}$. Por fim, para encontrar os valores de x, basta somar 2 a cada um desses valores.

Alternativamente, se quisermos usar a fórmula de Cardano, teríamos que tomar $p=-8$ e $q=-7$ e substituir na fórmula. Isso nos dá

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=\frac{49}{4}-\frac{8^3}{27}=\frac{1323-2048}{4\cdot 27}=\frac{-725}{108}.$$

Logo,

$$z=\sqrt[3]{\frac{7}{2}+\frac{5i}{6}\sqrt{\frac{29}{3}}}+\sqrt[3]{\frac{7}{2}-\frac{5i}{6}\sqrt{\frac{29}{3}}}.$$

Simplificar a expressão acima e ainda descobrir qual raiz complexa do primeiro radical deve ser pareada com qual raiz do segundo é bastante trabalhoso. Contudo, produziria como resultado as mesmas 3 raízes encontradas anteriormente. $\square$

Usando a primeira parte do exemplo acima, fica claro que, no caso geral de uma equação da forma

$$x^3-Sx^2+Tx-P=0,$$

basta fazer a substituição $x=z+(S/3)$. O resultado nos fornecerá uma equação de terceiro grau em z, na qual o coeficiente de z^2 é igual a zero. Independentemente de optarmos por aplicar ou não a fórmula de Cardano, tal equação costuma ser mais simples de resolver do que a equação original.

Dicas para o Professor

Este material se propõe a apresentar de forma bastante direta uma justificativa para a fórmula de resolução de equações de segundo grau (Fórmula de Bhaskara) a fim de, em seguida, chegar ao caso especial de equações de terceiro grau sem termo x^2. O intuito é chegar à fórmula da resolvente da equação de terceiro grau na aula seguinte, de uma maneira breve, bem como dar exemplos de aplicações de tais fórmulas. Isso pode ser feito rapidamente, em um ou dois encontros de 50 minutos.

Ressaltamos que a parte sobre "completar quadrados" é abordada de maneira bem mais ampla no módulo "Equações do Segundo Grau" do Nono Ano do Ensino Fundamental, começando de casos mais simples e justificando a intuição por trás de cada operação, dando a devida atenção que o tema merece.

A referência [1] contém uma discussão relativamente completa e profunda sobre equações polinomiais. A referência [2] é uma agradável leitura, a qual contempla a história das tentativas de se resolver equações polinomiais.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 6: Polinômios*. SBM, Rio de Janeiro, 2016.

2. I. Stewart. *Uma História da Simetria em Matemática*. Zahar, Rio de Janeiro, 2012.