Material Teórico - Módulo Equações do Segundo Grau

Equações do Segundo Grau: Resultados Básicos

Nono Ano do Ensino Fundamental

Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

1 Equações de segundo grau

Nesta aula, damos início ao estudo das equações do segundo grau. Uma equação do segundo grau é uma equação da forma

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

onde a, b e c são números reais conhecidos, sendo $a \neq 0$, e x é uma incógnita real. Os valores reais de x que satisfazem a equação são chamados de **raízes**, ao passo que o conjunto formado pelas raízes é o **conjunto solução** da equação. O nome 'segundo grau', vem do fato de que o lado esquerdo da equação é um polinômio de grau 2, ou seja, onde o maior expoente de x é igual a 2. Se tivéssemos $a = 0$, o termo ax^2 seria nulo, e assim ficaríamos apenas com a equação de *primeiro grau* $bx + c = 0$.

Equações do segundo grau aparecem com bastante frequência na resolução de problemas em várias áreas, por exemplo, geometria e física. Começaremos com exemplos bem simples e avançaremos até encontrarmos uma fórmula para resolver a equação acima em sua generalidade. Tal fórmula é conhecida popularmente como *fórmula de Bhaskara*.

Exemplo 1. *Calcule a medida do lado de um quadrado, sabendo que sua área é* $36\,\mathrm{cm}^2$*.*

Solução. Representando por x a medida desejada, temos que $x^2 = 36$. Isso quer dizer que $x = \sqrt{36}$ ou $x = -\sqrt{36}$, de forma que $x = 6$ ou $x = -6$. Mas, como x é a medida do lado de um quadrado, temos que x precisa ser positivo. Logo, $x = 6\,\mathrm{cm}^2$. □

Importante: a raiz quadrada de qualquer número real positivo é, *por convenção*, sempre *positiva*. Por exemplo, a raiz quadrada de 36, denotada por $\sqrt{36}$, é igual a 6 (e somente 6). Apesar disto, como vimos acima, existem dois números reais, a saber 6 e -6, cujo quadrado é igual a 36. Por isso, na solução do exemplo anterior concluímos que há dois casos: $x = \sqrt{36}$ ou $x = -\sqrt{36}$. Temos, pois, que considerar esses dois casos separadamente. Dependendo do contexto do problema ou de condições conhecidas sobre a variável x, muitas vezes, mas nem sempre, podemos descartar uma dessas duas possibilidades.

A seguir, mostramos que, para qualquer real não negativo c, se $x^2 = c$, então $x = \sqrt{c}$ ou $x = -\sqrt{c}$. Para isso, basta utilizarmos o seguinte fato (que será utilizado também várias outras vezes ao longo desta aula).

Quando o produto de dois ou mais números reais é igual a zero, obrigatoriamente pelo menos um deles tem que ser igual a zero.

Usando produtos notáveis e o fato acima, obtemos

$$\begin{aligned} x^2 = c &\Leftrightarrow x^2 - (\sqrt{c})^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x + \sqrt{c})(x - \sqrt{c}) = 0 \\ &\Leftrightarrow x + \sqrt{c} = 0 \text{ ou } x - \sqrt{c} = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -\sqrt{c} \text{ ou } x = \sqrt{c}. \end{aligned}$$

Observação 2 (Cuidado). *Se x é um número real não nulo qualquer, temos que x^2 é sempre positivo. Sendo assim, existe $\sqrt{x^2}$. Contudo, como $\sqrt{x^2}$ é positivo mesmo quando x é negativo, nem sempre vale que $\sqrt{x^2}$ seja igual a x. Por exemplo, tomando $x = -3$, temos que $x^2 = (-3)^2 = 9$; assim, $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3 \neq -3$.*

O que podemos escrever sempre é:

$$\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Por fim, se x e y forem reais tais que $x^2 = y^2$, então podemos dizer que $x = y$ ou $x = -y$. De fato, basta ver que $x^2 - y^2 = 0$ equivale a $(x + y)(x - y) = 0$, que por sua vez equivale a $x + y = 0$ ou $x - y = 0$, como queríamos.

Exemplo 3. *Obtenha um número tal que o dobro de seu quadrado seja igual a seu sêxtuplo.*

Solução. Seja x o número que queremos encontrar. Interpretando o enunciado, temos que:

$$\begin{aligned} 2x^2 = 6x &\Leftrightarrow 2x^2 - 6x = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x(x - 3) = 0 \\ &\Leftrightarrow x(x - 3) = 0. \end{aligned}$$

Temos então que $x = 0$ ou $x - 3 = 0$. Logo, há dois possíveis números x que satisfazem o enunciado: 0 e 3. □

Revendo as equações dos exemplos anteriores e comparando com o formato $ax^2 + bx + c = 0$, temos que:

(a) No Exemplo 1: $x^2 - 36 = 0$, logo $a = 1$, $b = 0$, $c = -36$.

(b) No Exemplo 3: $2x^2 - 6x = 0$, logo $a = 2$, $b = -6$, $c = 0$.

O Exemplo 1 é simples pois $b = 0$, e o Exemplo 3 é simples pois $c = 0$. No exemplo a seguir, temos uma situação um pouco mais complicada, pois a, b e c serão todos diferentes de 0.

Exemplo 4. *Encontre dois números naturais ímpares consecutivos cujo produto seja igual a* 195*.*

Solução. Chamando de x o menor dos números procurados, temos que o maior deles será $x + 2$. Logo,

$$\begin{aligned} x(x + 2) = 195 &\Leftrightarrow x^2 + 2x = 195 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 2x - 195 = 0. \end{aligned}$$

Temos aqui, uma equação do segundo grau. Diferentemente dos exemplos anteriores, agora não é óbvio como poderíamos fatorar o lado esquerdo. Para fazer isso, vamos usar uma técnica chamada de “completamento de quadrados”. Aqui, isso pode ser feito lembrando do produto notável $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$. Vamos, então, somar 1 a ambos os lados da equação original, obtendo:

$$(x^2 + 2x + 1) - 195 = 0 + 1 \Leftrightarrow (x + 1)^2 = 196.$$

Agora ficou fácil: como $196 = 14^2$, temos que $x + 1 = 14$ ou $x+1 = -14$. Logo $x = 13$ ou $x = -15$. Por fim, como o enunciado diz que x deve ser um número natural, a única opção válida é $x = 13$. Logo, os dois números procurados, x e $x + 2$, são iguais a 13 e 15. $\square$

Na próxima seção, exploramos com detalhes a técnica de completamento de quadrados.

2 Como completar quadrados

O passo essencial para completarmos quadrados é lembrarmo-nos dos dois seguintes produtos notáveis:

$$(x + k)^2 = x^2 + 2kx + k^2,$$
$$(x - k)^2 = x^2 - 2kx + k^2.$$

O lado direito de ambas as equações acima é chamado de *trinômio quadrado perfeito*, que iremos abreviar por *tqp*. É comum pensarmos em x como uma incógnita real e em k como um valor real já conhecido. Uma vez que o coeficiente de x^2 é igual a 1, a condição essencial para termos um tqp é que o valor do termo independente de x (ou seja, k^2) possa ser obtido começando com o valor do coeficiente de x (ou seja, $\pm 2k$), dividindo tal valor por 2 (obtendo $\pm k$) e, finalmente, elevando o resultado ao quadrado (obtendo k^2).

Exemplo 5. *Identifique se a expressão $x^2 - 18x + 91$ é um trinômio quadrado perfeito. Em seguida, encontre as raízes da equação $x^2 - 18x + 91 = 0$.*

Solução. Primeiro checamos que o coeficiente de x^2 é igual a 1. O valor do coeficiente de x é igual a 18, de forma que $2k = 18$. A metade deste valor é igual a 9. Por fim, $9^2 = 81$, que é o valor do termo independente. Logo, temos sim um tqp. Ademais, identificamos que $k = 9$, de sorte que $x^2 - 18x + 81 = (x - 9)^2$.

Agora, se tivermos $x^2 - 18x + 91 = 0$, então $(x - 9)^2 = 0$. Isso, por sua vez, só ocorre quando $x - 9 = 0$, ou seja, quando $x = 9$. $\square$

Os dois exemplos a seguir seguem os mesmos passos do exemplo anterior, ainda que de forma mais sucinta.

Exemplo 6. *A expressão $x^2 + 6x + 9$ é um trinômio quadrado perfeito, pois $(6/2)^2 = 3^2 = 9$. Por outro lado, $x^2 + 8x + 10$ não é um tqp pois $(8/2)^2 = 4^2 = 16 \neq 10$.*

Exemplo 7. *A expressão $x^2 + 2\sqrt{2}x + 2$ também é um tqp, apesar de um dos coeficientes envolvidos ser irracional. De fato, $(2\sqrt{2}/2)^2 = (\sqrt{2})^2 = 2$. De forma semelhante, $x^2 + 3x + 9/4$ também é um tqp, pois $(3/2)^2 = 9/4$.*

Se tivermos uma expressão do tipo $x^2 - bx$, *completar quadrados* significa somar algum termo a ela de modo que o resultado seja um tqp. Pelo que vimos acima, o termo que devemos acrescentar é obtido tomando o valor do coeficiente de x, ou seja, $\pm b$, dividindo-o por 2 e elevando o resultado ao quadradro, obtendo assim $(b/2)^2$.

O resultado é:

$$x^2 - bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = x^2 - 2\left(\frac{b}{2}\right)x + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{b}{2}\right)^2.$$

O caso em que o sinal “$-$” (menos) é trocado por “$+$” (mais) é semelhante e fornece

$$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = x^2 + 2\left(\frac{b}{2}\right)x + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2.$$

Para tratar os casos $x^2 + bx$ e $x^2 - bx$ de uma única vez, podemos usar o sinal “$\pm$”, que pode ser substituído tanto pelo sinal “$+$” como pelo de “$-$”, subentendendo-se que todas as ocorrências de $\pm$ dentro de uma equação assumem o mesmo valor.

É claro que, ao somarmos o termo $(b/2)^2$ com a expressão $x^2 \pm bx$, o valor final será diferente do valor original da expressão. Portanto, se quisermos obter o mesmo valor original, é necessário subtrair novamente o termo $(b/2)^2$. Assim, obtemos:

$$\begin{aligned} x^2 \pm bx &= x^2 \pm bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 \\ &= \left(x \pm \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Alternativamente, quando temos uma equação do tipo $x^2 \pm bx = r$, ao somarmos $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ a ambos os lados, obtemos:

$$\begin{aligned} x^2 \pm bx = r &\Leftrightarrow x^2 \pm bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + r \\ &\Leftrightarrow \left(x \pm \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + r. \end{aligned}$$

Também é possível usar uma técnica semelhante com expressões em que o coeficiente de x^2 é diferente de 1. Para isso, basta fazer inicialmente uma *mudança de variável*. Por exemplo, se no início tivermos a expressão $9x^2 + 5x$, observe que $9x^2 = (3x)^2$. Daí, basta substituir $3x$ por y, ou seja $x = y/3$, para obter:

$$9x^2 + 5x = (3x)^2 + 5x = y^2 + 5\frac{y}{3} = y^2 + \frac{5}{3}y.$$

A partir daí, podemos obter o tqp $\left(y + \frac{5}{6}\right)^2$ somando-se $(5/6)^2$ a ambos os lados. Outra alternativa é observarmos diretamente que:

$$\begin{aligned} 9x^2 + 5x + \left(\frac{5}{6}\right)^2 &= (3x)^2 + 2 \cdot (3x) \cdot \frac{5}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 \\ &= \left(3x + \frac{5}{6}\right)^2. \end{aligned}$$

Em todo caso, como veremos em exemplos da seção seguinte, se tivermos uma equação $ax^2 + bx = r$, com $a \neq 0$, costuma ser mais fácil simplesmente dividir ambos os lados por a, a fim de obter rapidamente uma expressão em que o coeficiente de x^2 seja igual a 1.

3 Exemplos de aplicações

Comecemos examinando alguns exemplos em que equações do segundo grau surgem de forma indireta.

Exemplo 8. *A diferença entre as idades de dois irmãos é igual a* 3 *anos, e o produto de suas idades é* 270*. Qual a idade de cada um?*

Solução. Sejam x e y as idades dos dois irmãos. Interpretando os dados, obtemos o sistema de equações:

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ x \cdot y = 270. \end{cases}$$

Da primeira equação, obtemos $x = y + 3$. Substituindo tal expressão para x na segunda equação, obtemos:

$$(y + 3) \cdot y = 270$$

ou, o que é o mesmo,

$$y^2 + 3y = 270.$$

Agora, para resolver a equação, vamos completar quadrados, isto é, somar algo aos dois lados da equação, a fim de obter um trinômio quadrado perfeito no lado esquerdo. Como visto na seção anterior, basta somarmos $(\frac{3}{2})^2$, para obter sucessivamente:

$$\begin{aligned} y^2 + 3y + \left(\frac{3}{2}\right)^2 &= 270 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \\ \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 &= 270 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \\ \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 &= \frac{1089}{4}. \end{aligned}$$

Como $\sqrt{\frac{1089}{4}} = \frac{33}{2}$, conclui-se que:

$$y + \frac{3}{2} = \frac{33}{2} \text{ ou } y + \frac{3}{2} = -\frac{33}{2}.$$

Portanto,

$$y = \frac{30}{2} = 15 \text{ ou } y = -\frac{36}{2} = -18.$$

Mas, pelo enunciado do problema, y é a idade de uma pessoa, logo, um número positivo. Assim, a única opção válida é $y = 15$. Por fim, lembrando que $x = y + 3$, chegamos a $x = 15 + 3 = 18$. Temos, então, que as idades são 15 e 18. □

Exemplo 9. *Calcule as dimensões de um retângulo, sabendo que seu perímetro é* $16\,\text{cm}$ *e sua área é* $15\,\text{cm}^2$*.*

Solução. Vamos chamar de x e y as medidas de dois lados perpendiculares do retângulo. Lembrando que o perímetro é igual à soma das medidas dos quatro lados do retângulo, concluímos que ele vale $2x + 2y$. Por outro lado, a área do retângulo é igual a $x \cdot y$. Assim, temos que:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 16 \\ xy = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 8 \\ xy = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 8 - x \\ xy = 15 \end{cases}.$$

Substituindo na segunda equação o valor para y obtido na primeira equação, obtemos $x(8 - x) = 15$, ou ainda $8x - x^2 = 15$. Para completar quadrados, vamos precisar que o coeficiente de x^2 seja igual a 1; por isso, reescrevemos a equação como:

$$x^2 - 8x = -15.$$

Agora, basta somar $\left(\frac{8}{2}\right)^2$, ou seja, 4^2, a ambos os lados da última equação para obter sucessivamente

$$\begin{aligned} x^2 - 8x + 4^2 &= -15 + 4^2 \\ (x - 4)^2 &= 1. \end{aligned}$$

Logo,

$$x - 4 = 1 \text{ ou } x - 4 = -1,$$

de sorte que

$$x = 5 \text{ ou } x = 3.$$

(Veja que, dessa vez, ambas as opções são possíveis.) Para terminar, devemos encontrar o valor de y em cada caso. Como $y = 8 - x$, temos:

$$\begin{aligned} x = 5 &\implies y = 3. \\ x = 3 &\implies y = 5. \end{aligned}$$

Ora, mas em ambos os casos, o conjunto das medidas dos lados, $\{x, y\}$, é igual a $\{3, 5\}$, e a troca de um pelo outro muda no máximo a ordem em que os lados são desenhados. Assim, as medidas em questão são $3\,\text{cm}$ e $5\,\text{cm}$. □

Exemplo 10. *Um pai tinha 30 anos quando seu filho nasceu. Se multiplicarmos as idades que eles possuem hoje, obtemos um produto que é igual a três vez o quadrado da idade do filho. Calcule as idades de ambos.*

Solução. Vamos chamar de x a idade que o filho tem hoje. Como o pai tinha 30 anos quando o filho nasceu, temos que o pai é 30 anos mais velho que o filho, ou seja, a idade que o pai tem hoje é $x + 30$. Interpretando o restante do enunciado, temos:

$$x \cdot (x + 30) = 3x^2.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} x^2 + 30x = 3x^2 &\Leftrightarrow 2x^2 = 30x \Leftrightarrow 2x^2 - 30x = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x(x - 15) = 0, \end{aligned}$$

de modo que

$$x = 0 \;\text{ ou }\; x - 15 = 0.$$

Podemos descartar a opção em que $x = 0$, pois caso contrário não existiria filho. Portando, a idade do filho é 15 anos e a idade do pai é $15 + 30 = 45$ anos. □

Exemplo 11. *Resolva a equação do segundo grau $3x^2 - 15x + 18 = 0$ usando o método de completar quadrados.*

Solução. Obter um trinômio quadrado perfeito no lado esquerdo é mais fácil quando o coeficiente de x^2 é igual a 1. Assim, vamos começar simplificando a equação, dividindo ambos os lados por 3 para obter:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

ou, ainda,

$$x^2 - 5x = -6.$$

Para obter um trinômio quadrado perfeito do lado esquerdo, precisamos somar $(5/2)^2$ a ambos os lados. Assim fazendo, temos sucessivamente

$$\begin{aligned} x^2 - 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 &= -6 + \left(\frac{5}{2}\right)^2. \\ \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 &= -6 + \frac{25}{4}. \\ \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Conclui-se então que:

$$x - \frac{5}{2} = \frac{1}{2} \;\text{ ou }\; x - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2}$$

No primeiro caso, obtemos

$$x = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = \frac{6}{2} = 3;$$

no segundo,

$$x = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

Assim, temos duas soluções válidas: $x = 2$ ou $x = 3$. □

A próxima seção, generaliza a discussão do exemplo anterior a uma equação de segundo grau genérica.

4 A fórmula resolvente da equação de segundo grau

Conforme comentamos acima, vamos utilizar o mesmo método das seções anteriores para resolver a equação

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{1}$$

onde a, b e c são reais dados, sendo $a \neq 0$. O resultado será uma fórmula geral, que retorna os possíveis valores reais de x em função de a, b e c. Tal fórmula foi desenvolvida por um matemático indu chamado Sridhara, no Século X d.C. Contudo, ela foi publicada apenas no Século XII, por Bhaskara, um matemático também indu. Por isso, ela acabou ficando conhecida popularmente como "fórmula de Bhaskara"[1].

Como $a \neq 0$, podemos começar dividindo ambos os lados de (1) por a. (Isso tornará mais fácil completar quadrados.) Assim fazendo, temos que:

$$x^2 + \left(\frac{b}{a}\right) x + \frac{c}{a} = 0$$

ou, ainda,

$$x^2 + \left(\frac{b}{a}\right) x = -\frac{c}{a}.$$

Para completar o trinômio quadrado perfeito do lado esquerdo, basta somar $\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2$. Fazendo isso em ambos os lados (a fim de não alterar a equação), obtemos sucessivamente:

$$\begin{aligned} x^2 + 2\left(\frac{b}{2a}\right) x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 &= \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} \\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}. \end{aligned}$$

Para tornar esta expressão mais curta, é costume denotar o termo $b^2 - 4ac$ pela letra grega maiúscula delta, cujo símbolo é Δ. Assim, escrevemos

$$\Delta = b^2 - 4ac. \tag{2}$$

Esse valor de delta é também conhecido como o **discriminante** da equação do segundo grau (1). Com o auxílio do mesmo, a equação reduz-se agora a

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}. \tag{3}$$

[1] Há relatos de que, muito antes dessa época, os antigos babilônios já conseguiam resolver certas equações do segundo grau.

Como o lado esquerdo da equação (3) é não negativo para todo valor real de x, e como $4a^2$ é sempre positivo, se o valor de Δ for negativo, concluímos que nenhum valor de x irá satisfazer a equação (3). Sendo assim, nesse caso a equação original também não terá qualquer solução.

Agora, quando $\Delta \geq 0$, podemos reescrever (3) como

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2, \tag{4}$$

de sorte que

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

No primeiro caso obtém-se:

$$x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a},$$

ao passo que, no segundo, obtém-se

$$x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Para facilitar a memorização, os dois casos acima são escritos em uma única linha com o sinal $\pm$. Observe que, quando $\Delta = 0$, esses dois valores coincidem.

Resumimos a discussão acima no quadro a seguir:

> Se $\Delta \geq 0$, as soluções da equação $ax^2 + bx + c = 0$, onde $a \neq 0$, podem ser obtidas pela fórmula:
>
> $$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ onde } \Delta = b^2 - 4ac.$$

Observação 12. *Já vimos que a equação não possui soluções quando $\Delta < 0$. Ou seja, a equação não possui raízes reais. Também conforme observamos acima, no caso em que $\Delta = 0$ os dois valores obtidos para x serão iguais, e a equação possui apenas uma solução. Ainda nesse caso, dizemos por vezes que a equação possui uma raiz (real)* dupla. *Por fim, quando $\Delta > 0$, a equação possui (exatamente) duas soluções/raízes reais distintas.*

5 Aplicando a fórmula de Bhaskara

Nesta última seção, resolveremos mais exercícios, agora apenas aplicando diretamente a fórmula de Bhaskara. Esse método pode ser mais rápido do que o de completamento de quadrados, mas requer que tenhamos memorizado a fórmula em questão.

Exemplo 13. *Encontre as raízes de cada uma das equações a seguir:*

(a) $x^2 - 7x + 6 = 0$.

(b) $2x^2 + x = 10$.

(c) $x^2 + 2x + 3 = 0$.

(d) $x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{10}{3}$.

Solução.

(a) Temos que $a = 1$, $b = -7$ e $c = 6$. Assim,

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 49 - 24 = 25,$$

de modo que

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{7 \pm 5}{2}.$$

Logo,

$$x = \frac{7+5}{2} = \frac{12}{2} = 6 \quad \text{ou} \quad x = \frac{7-5}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

Em resumo, as raízes da equação são 1 e 6.

(b) Cuidado: para descobrir a, b e c, é necessário que um dos lados da equação seja igual a zero. Devemos, então, reescrevê-la como:

$$2x^2 + x - 10 = 0.$$

Daí, $a = 2$, $b = 1$ e $c = -10$ (atente para o fato de que c não é igual a 10, mas sim -10). Sendo assim,

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-10) = 1 + 80 = 81,$$

e segue que

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{81}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm 9}{4} = \begin{cases} \dfrac{-1+9}{4} = 2, & \text{ou} \\ \dfrac{-1-9}{4} = \dfrac{-5}{2}. \end{cases}$$

Logo as raízes são 2 e $-5/2$.

(c) Temos que $a = 1$, $b = 2$ e $c = 3$. Logo,

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4 - 12 = -8.$$

Como $\Delta < 0$, podemos concluir diretamente que esta equação não possui raiz real.

(d) Esta equação pode ser reescrita no formato de uma equação do segundo grau, observando-se que:

$$\frac{x^2+1}{x} = \frac{10}{3} \Leftrightarrow 3x^2 + 3 = 10x \Leftrightarrow 3x^2 - 10x + 3 = 0.$$

Em tal equação, temos $a = 3$, $b = -10$ e $c = 3$. Ademais,

$$\Delta = (-10)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 100 - 36 = 64.$$

Portanto,

$$x = \frac{-(-10) \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 3} = \frac{10 \pm 8}{6} = \begin{cases} \dfrac{10+8}{6} = 3, & \text{ou} \\ \dfrac{10-8}{6} = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

□

Exemplo 14. *Um Ministro brasileiro organizou uma recepção na qual exatamente metade dos convidados não eram brasileiros, sendo todos eles de países cuja língua oficial não é o Português. Por delicadeza, ao chegar cada convidado disse "bom dia" ao ministro e a cada um dos convidados brasileiros. Sabendo que, ao todo, foram ditos 78 "bons dias", e que o ministro respondeu "bem vindo" a cada um dos convidados, encontre o total de convidados.*

Solução. Sendo x a quantidade de convidados estrangeiros, temos que também havia x convidados brasileiros, além do ministro. Cada um dos convidados brasileiros disse "bom dia" para o Ministro e também para cada um dos demais $x-1$ brasileiros. Sendo assim, o total de "bons dias" dito por brasileiros foi de $x + x(x-1) = x^2$. Por outro lado, cada estrangeiro disse "bom dia" para o Ministro e para cada um dos x brasileiros. Sendo assim, eles fizeram isso exatamente $x + x \cdot x = x(x+1)$ vezes. Por mim, o ministro nunca falou "Bom dia", pois ele sempre respondeu apenas "bem vindo" aos convidados.

Dessa forma, conclui-se que o total de "bom dias" proferidos foi de $x^2 + x(x+1) = 78$. Isso é o mesmo que $x^2 + x^2 + x = 78$ ou, ainda

$$2x^2 + x - 78 = 0.$$

Segue que

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-78) = 1 + 624 = 625$$

e, com isso,

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{625}}{4} = \begin{cases} \dfrac{-1+25}{4} = 6, & \text{ou} \\ \dfrac{-1-25}{4} = \dfrac{-26}{4}. \end{cases}$$

Como x (que é o número de convidados estrangeiros) precisa ser um número natural, a única solução válida é $x = 6$. Por fim, a resposta do problema é que o total de convidados, $2x$, é igual a 12. □

Dicas para o Professor

Sugerimos que o conteúdo desta aula seja tratado em quatro encontros de 50 minutos, com amplo tempo para resolução de exercícios. A demonstração da fórmula de Bhaskara exige que o aluno tenha uma boa familiaridade com manipulações algébricas. É preciso, ainda, que esteja clara a distinção entre os papéis das constantes a, b e c e da variável x. Observamos que a demonstração da fórmula de Bhaskara, apesar de ser um pouco longa, segue exatamente os mesmos passos que foram executados com valores numéricos para a, b e c, nas seções anteriores. Por isso é importante que estes exemplos sejam resolvidos.

É bastante útil conhecer a formula de Bhaskara e é importante saber utilizá-la diretamente, independentemente de se conhecer ou não a demonstração da mesma. Mas, é também importante entender os métodos de resolução de equações do segundo grau mais simples, como aquelas discutidas no início da primeira seção; em tais casos, veja que o uso da fórmula é absolutamente desnecessário.

As referências abaixo discutem equações de segundo grau exaustivamente, contemplando tanto o material discutido aqui quanto aquele porvir.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 1: Números Reais.* SBM, Rio de Janeiro, 2013.

2. G. Iezzi *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 1: Números Reais e Funções.* Atual Editora, Rio de Janeiro, 2013.