Material Teórico - Módulo de Frações como Porcentagem e Probabilidade

Frações como Porcentagem – Parte 2

Sexto Ano do Ensino Fundamental

Autores: Prof. Francisco Bruno Holanda e Prof. Ulisses Lima Parente
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

23 de maio de 2026

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Porcentagem

Na aula anterior, vimos que frações com potências de dez no denominador admitem representações decimais que generalizam as representações dos números naturais. Agora, vamos nos concentrar em frações de um tipo ainda mais particular, qual seja, aquelas com denominador igual a 100. Também, faremos uso de um símbolo especial para denotar tais frações, conhecido como *símbolo de porcentagem* (%), que pode ser pensado como representando a fração $\frac{1}{100}$. Assim, por exemplo,

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = \frac{50}{100} = 50\%.$$

As porcentagens têm uso difundido em diversos tipos de situações do cotidiano. A título de ilustração, é comum percebermos, no dia a dia, frases dos tipos abaixo:

A) A loja Tudo Barato está realizando uma promoção em que todos os seus produtos estão sendo vendidos com um desconto de 30%.

B) Mais de 40% das pessoas entrevistadas disseram que leem mais de um livro por mês.

C) Joaquim fez um teste e obteve 80% de acertos.

Perceba que, em todos esses casos, estamos trabalhando com frações. Especificamente, vejamos a seguir o que significam cada uma das frases acima:

Na situação descrita pela frase A), o desconto de 30% no preço de uma mercadoria de preço 50 reais, por exemplo, significa que, ao comprá-la durante a promoção, o consumidor pagará

$$30\% \cdot 50 = \frac{30}{100} \cdot 50 = 15$$

reais a menos que o preço original. Assim, ele pagará $50 - 15 = 35$ reais pela mercadoria.

Já a situação descrita na frase B) pode ser interpretada da seguinte maneira: se, por exemplo, 260 pessoas foram entrevistadas, então uma quantidade maior do que

$$40\% \cdot 260 = \frac{40}{100} \cdot 260 = 104$$

pessoas leem mais de um livro por mês, ou seja, ao menos 105 pessoas leem mais de um livro por mês.

Por fim, na situação C), suponha, novamente a título de ilustração, que o teste que Joaquim fez tinha 35 questões. Então, ele acertou

$$80\% \cdot 35 = \frac{8\cancel{0}}{10\cancel{0}} \cdot 35 = \frac{280}{10} = 28$$

das 35 questões.

A seguir, resolvemos mais alguns exercícios sobre este assunto, aproveitando-os para introduzir outros tantos conceitos importantes.

Exemplo 1. *Calcule:*

(*a*) 12% *de* 200.

(*b*) 35% *de* 540.

Solução. O fato mais importante sobre este exercício é você perceber que uma expressão do tipo

tantos % de *tanto*

deve ser interpretada como uma *multiplicação*. Assim, temos que

(a)

$$12\% \text{ de } 200 = \frac{12}{1\cancel{0}\cancel{0}} \cdot 2\cancel{0}\cancel{0} = 12 \cdot 2 = 24.$$

(b)

$$35\% \text{ de } 540 = \frac{35}{10\cancel{0}} \cdot 54\cancel{0} = \frac{35 \cdot 54}{10} = \frac{189\cancel{0}}{1\cancel{0}} = 189.$$

$\square$

Exemplo 2. *Um reservatório com capacidade para* 17000 *L de água estava completamente cheio. Devido a um vazamento, ele perdeu* 15% *do volume inicial, até que o problema foi resolvido. Calcule o volume de água que restou no reservatório.*

Solução. Primeiramente, calculamos o volume de água perdido com o vazamento, que correspondeu a 15% do total de 17000 L, ou seja:

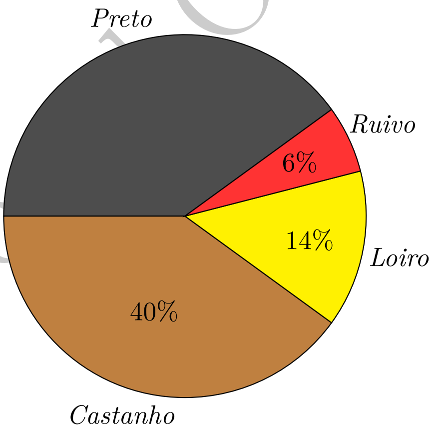
$$\frac{15}{1\cancel{0}\cancel{0}} \cdot 170\cancel{0}\cancel{0} = 15 \cdot 170 = 2550 \text{ litros.}$$

Desse modo, o volume restante após a perda passou a ser de

$$17000 \text{ L} - 2550 \text{ L} = 14450 \text{ L}.$$

$\square$

Exemplo 3. *Uma pesquisa levantou as cores de cabelo de* 1200 *pessoas. Os resultados obtidos são mostrados no diagrama a seguir:*



Pergunta-se: quantas pessoas entrevistadas possuem cabelo preto?

Solução. Para resolver este exercício, veja inicialmente que a soma dos percentuais das pessoas que responderam que têm cabelos ruivos, loiros ou castanhos é

$$6\% + 14\% + 40\% = \frac{6}{100} + \frac{14}{100} + \frac{40}{100} = \frac{60}{100} = 60\%.$$

Agora, como 100% representa a totalidade das pessoas e $100\% = \frac{100}{100} = 1$, concluímos que o porcentual de pessoas com cabelo preto é

$$100\% - 60\% = 1 - \frac{60}{100} = \frac{40}{100} = 40\%,$$

ou seja, 40% de um total de 1200 pessoas. Consequentemente, o número de pessoas entrevistadas que possuem cabelo preto é

$$\frac{40}{1\cancel{0}\cancel{0}} \cdot 12\cancel{0}\cancel{0} = 480.$$

□

Exemplo 4 (OBM). *Diamantino colocou em um recipiente 3 litros de água e 1 litro de suco, o qual era composto de 20% de polpa de fruta e 80% de água. Depois de misturar tudo, que porcentagem do volume final é de polpa?*

Solução. Para facilitar os cálculos, vamos fazê-los em *mililitros* (mL); isso é bom porque, como sabemos, 1 litro (L) equivale a 1000 mililitros, e 1000 tem muitos zeros.

Assim, no suco original de 1000 mL, tínhamos $20\% = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$ de polpa; logo, tínhamos

$$\frac{1}{5} \cdot 1000 \text{ mL} = 200 \text{ mL}$$

de polpa.

Como a mistura final terá um volume total de 4 L = 4000 mL (3L de água + 1L de suco), a fração que representa a polpa na mistura é:

$$\frac{2\cancel{0}\cancel{0}}{40\cancel{0}\cancel{0}} = \frac{2}{40} = \frac{1}{20} = \frac{5}{100}.$$

Então, 5% do volume final corresponde à polpa de fruta. □

Exemplo 5. *As lojas "Preço Justo" e "Compra Certa" vendem uma mesma bicicleta por R\$ 1250,00. Na loja "Preço Justo", a bicicleta entrou em oferta por R\$ 1100,00. Já a loja "Compra Certa" anunciou um desconto de 11% em todos os produtos. Em qual das lojas o desconto ofertado foi maior?*

Solução. A loja "Preço Justo" concedeu um desconto absoluto de R\$ 1250,00 - R\$ 1100,00 = R\$ 150,00. Por outro lado, a "Compra Certa" ofereceu um desconto de 11% sobre o valor de R\$ 1250,00, ou seja:

$$\frac{11}{10\cancel{0}} \cdot 125\cancel{0} = \frac{1375}{10} = 137{,}50 \text{ reais.}$$

Portanto, o maior desconto, R\$ 150,00, foi o oferecido pela loja "Preço Justo". □

Exemplo 6. *Após o Natal, a dona de uma loja de roupas resolveu fazer uma liquidação e vender todas as suas peças com 20% de desconto. Maria cuida de um orfanato e, por isso, foi à loja comprar uma grande quantidade de roupas. Sabendo da causa social, a dona da loja lhe ofereceu um desconto extra, de 10% sobre os novos valores. Em relação ao preço original, qual a porcentagem do desconto recebido por Maria?*

Solução. Seja p o preço inicial de uma roupa. Após o primeiro desconto de 20%, o valor passou a ser $100\% - 20\% = 80\%$ de p, ou seja, $\frac{80}{100} \cdot p$. O segundo desconto de 10% foi aplicado *sobre o preço após o primeiro reajuste*. Então, Maria pagará 90% do novo valor:

$$\frac{90}{100} \cdot \left(\frac{80}{100} \cdot p\right) = \frac{9\cancel{0} \cdot 8\cancel{0}}{1\cancel{0}\cancel{0} \cdot 100} \cdot p = \frac{72}{100} \cdot p = 72\% \text{ de } p.$$

Portanto, se Maria vai pagar 72% do valor original, ela recebeu um desconto total (em relação ao preço original das roupas) de $100\% - 72\% = 28\%$. □

Ainda em relação ao exemplo anterior, observe que o desconto final foi de 28%, que é um pouco menos que $20\% + 10\% = 30\%$. Teremos mais a dizer sobre isso, adiante.

Exemplo 7 (OBM - adaptado)**.** *Películas protetoras para vidros são utilizadas em janelas de edifícios e vidros de veículos para reduzir a radiação solar. As películas são classificadas de acordo com seu grau de transparência, ou seja, com o percentual da radiação solar que elas deixam passar. Se colocarmos uma película de 70% de transparência sobre um vidro com 90% de transparência, calcule a redução de radiação solar para quem se encontra no interior do ambiente.*

Solução. Argumentando de maneira análoga à solução do exemplo anterior, concluímos que o conjunto película e vidro deixa passar um total de radiação solar de

$$\frac{7\cancel{0}}{1\cancel{0}\cancel{0}} \cdot \frac{9\cancel{0}}{100} = \frac{63}{100} = 63\%$$

do valor percebido ao ar livre. Portanto, quem se encontra no interior do ambiente recebe a radiação solar com uma redução de

$$100\% - 63\% = 37\%.$$

$\square$

Observação 8. Para evitar erros nos cálculos, *é essencial tratar descontos e acréscimos como operações de multiplicação.* Um equívoco bastante comum é acreditar que taxas sucessivas podem ser simplesmente somadas. Contudo, como ilustram claramente as soluções dos exemplos 6 e 7, esse raciocínio é incorreto.

Isso acontece porque as porcentagens representam medidas relativas. Ao serem aplicadas de forma sucessiva, *elas incidem sobre valores que já foram atualizados na etapa anterior*, e não mais sobre a quantia original. Portanto, guarde sempre esta regra:

A aplicação de porcentagens sucessivas a um certo total inicial não equivale à aplicação da soma dessas porcentagens ao total inicial.

O último exemplo que discutiremos é mais trabalhoso e pode ser omitido numa primeira leitura.

Exemplo 9 (OBM). *Gabriel resolveu uma prova de Matemática com questões de Álgebra, Geometria e Lógica. Após checar o gabarito da prova, Gabriel observou que respondeu corretamente* 50% *das questões de Álgebra,* 70% *das questões de Geometria e* 80% *das questões de Lógica. Gabriel observou, também, que respondeu corretamente* 62% *das questões de Álgebra ou Lógica e* 74% *das questões de Geometria ou Lógica. Qual a porcentagem de questões corretas na prova de Gabriel?*

Solução. Denotemos por A, G e L, respectivamente, as quantidades de questões de Álgebra, Geometria e Lógica da prova, e por a, g e l as quantidades de questões respondidas de modo correto por Gabriel em cada uma dessas três áreas.

Como $A+G+L$ é o total de questões na prova e $a+g+l$ é o total de questões respondidas corretamente, a porcentagem de questões corretas na prova de Gabriel corresponde à fração

$$\frac{a+g+l}{A+G+L}.$$

Para calculá-la, note que, de acordo com o enunciado no problema, temos:

$$a = \frac{50}{100} \cdot A \quad \therefore \quad a = 0{,}5A;$$

$$g = \frac{70}{100} \cdot G \quad \therefore \quad g = 0{,}7G;$$

e

$$l = \frac{80}{100} \cdot L \quad \therefore \quad l = 0{,}8L.$$

Ainda de acordo com o enunciado, temos:

$$a + l = \frac{62}{100} \cdot (A+L) \quad \therefore \quad a + l = 0{,}62(A+L);$$

$$g + l = \frac{74}{100} \cdot (G+L) \quad \therefore \quad g + l = 0{,}74(G+L).$$

Substituindo nessas duas relações os valores de a, g e l obtidos nas três primeiras equações, ficamos com as igualdades

$$\begin{cases} 0{,}5A + 0{,}8L = 0{,}62(A+L); \\ 0{,}7G + 0{,}8L = 0{,}74(G+L). \end{cases}$$

Agora, note que

$$\begin{aligned} 0{,}5A + 0{,}8L = 0{,}62(A+L) &\iff 0{,}12A = 0{,}18L \\ &\iff A = \frac{0{,}18L}{0{,}12} = \frac{3L}{2} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} 0{,}7G + 0{,}8L = 0{,}74(G+L) &\Longrightarrow 0{,}04G = 0{,}06L \\ &\Longrightarrow G = \frac{0{,}06L}{0{,}04} = \frac{3L}{2}. \end{aligned}$$

Daí, segue que

$$\begin{aligned} \frac{a+g+l}{A+G+L} &= \frac{0{,}5A + 0{,}7G + 0{,}8L}{A+G+L} \\ &= \frac{0{,}5 \cdot \frac{3L}{2} + 0{,}7 \cdot \frac{3L}{2} + 0{,}8L}{\frac{3L}{2} + \frac{3L}{2} + L} \\ &= \frac{0{,}75L + 1{,}05L + 0{,}8L}{1{,}5L + 1{,}5L + L} \\ &= \frac{2{,}6\cancel{L}}{4\cancel{L}} = 0{,}65 = \frac{65}{100}. \end{aligned}$$

Então, concluímos que o percentual de questões respondidas corretamente por Gabriel foi de 65%. □

Dicas para o Professor

Recomendamos que os assuntos explorados neste material sejam trabalhados em duas sessões de 50 minutos. É aconselhável que o professor utilize esse tempo para focar nas aplicações práticas de porcentagem e na resolução detalhada dos exercícios.

Durante as aulas, recomendamos que seja dada uma atenção especial aos problemas que tratam de aumentos e descontos percentuais sucessivos. É fundamental garantir que os alunos compreendam que não devem simplesmente somar as porcentagens. Também é muito importante explicar com todo o cuidado os problemas que apresentam mais de uma ideia em sua solução (como as questões adaptadas da OBM), ou seja, aqueles que não têm uma solução imediata apenas aplicando a ideia básica de porcentagem.

Para tornar o aprendizado mais dinâmico, um projeto prático pode ser implementado com base no que foi aprendido:

- **Projeto Prático (Gráficos e Pesquisa):** os alunos podem fazer uma pesquisa sobre qualquer assunto de interesse e, em seguida, registrar o resultado em formato de gráfico de pizza (setores), ilustrando as respectivas porcentagens. Caso a escola possua computadores, esse é um excelente momento para apresentar aos alunos o funcionamento de softwares de planilhas eletrônicas, como o Excel.