Material Teórico - Módulo Equações do Segundo Grau

Resultados Básicos - Parte I

Nono Ano do Ensino Fundamental

Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

07 de Agosto de 2025

Portal da Matemática
OBMEP

1 Equações de segundo grau

Nesta aula, damos início ao estudo das equações do segundo grau. Uma equação do segundo grau é uma equação da forma

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

onde a, b e c são números reais conhecidos, sendo $a \neq 0$, e x é uma incógnita real.

Os valores reais de x que satisfazem a equação são chamados de **raízes**, ao passo que o conjunto formado pelas raízes é o **conjunto solução** da equação. O nome 'segundo grau', vem do fato de que o lado esquerdo da equação é uma *expressão polinomial* de grau 2, ou seja, onde o maior expoente de x é igual a 2. Se tivéssemos $a = 0$, o termo ax^2 seria nulo, e assim ficaríamos apenas com a *equação de primeiro grau* $bx + c = 0$.

Equações do segundo grau aparecem com bastante frequência na resolução de problemas em várias áreas, por exemplo, Geometria e Física. Começaremos com exemplos bem simples e avançaremos até encontrarmos uma fórmula para resolver a equação acima em sua generalidade. Tal fórmula é conhecida popularmente como *fórmula de Bhaskara*.

Exemplo 1. *Calcule a medida do lado de um quadrado, sabendo que sua área é* $36\,\text{cm}^2$.

Solução. Representando por x a medida desejada, temos que $x^2 = 36$. Isso quer dizer que $x = \sqrt{36}$ ou $x = -\sqrt{36}$, de forma que $x = 6$ ou $x = -6$. Mas, como x é a medida do lado de um quadrado, temos que x precisa ser positivo. Logo, $x = 6\,\text{cm}^2$. □

Importante: a raiz quadrada de qualquer número real positivo é, *por convenção*, sempre *positiva*. Por exemplo, a raiz quadrada de 36, denotada por $\sqrt{36}$, é igual a 6 (e somente 6). Apesar disto, como vimos acima, existem dois números reais, a saber 6 e -6, cujo quadrado é igual a 36. Por isso, na solução do exemplo anterior concluímos que há dois casos: $x = \sqrt{36}$ ou $x = -\sqrt{36}$. Temos, pois, que considerar esses dois casos separadamente. Dependendo do contexto do problema ou de condições conhecidas sobre a variável x, muitas vezes, mas nem sempre, podemos descartar uma dessas duas possibilidades.

A seguir, mostramos que, para qualquer real não negativo c, se $x^2 = c$, então $x = \sqrt{c}$ ou $x = -\sqrt{c}$. Para isso, basta utilizarmos o seguinte fato (que será utilizado também várias outras vezes ao longo deste e dos próximos materiais).

> Quando o produto de dois ou mais números reais é igual a zero, obrigatoriamente pelo menos um deles tem que ser igual a zero.

Usando produtos notáveis e o fato acima, obtemos

$$\begin{aligned} x^2 = c &\Leftrightarrow x^2 - (\sqrt{c})^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x + \sqrt{c})(x - \sqrt{c}) = 0 \\ &\Leftrightarrow x + \sqrt{c} = 0 \ \text{ ou } \ x - \sqrt{c} = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -\sqrt{c} \ \text{ ou } \ x = \sqrt{c}. \end{aligned}$$

Observação 2 (Cuidado). *Se x for um número real não nulo qualquer, temos que x^2 é sempre positivo. Sendo assim, existe $\sqrt{x^2}$. Contudo, como $\sqrt{x^2}$ é positivo mesmo quando x é negativo, nem sempre vale que $\sqrt{x^2}$ seja igual a x. Por exemplo, tomando $x = -3$, temos que $x^2 = (-3)^2 = 9$; assim, $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3 \neq -3$.*

O que podemos escrever sempre é:

$$\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Por fim, se x e y forem reais tais que $x^2 = y^2$, então podemos dizer que $x = y$ ou $x = -y$. De fato, basta ver que $x^2 - y^2 = 0$ equivale a $(x + y)(x - y) = 0$, que por sua vez equivale a $x + y = 0$ ou $x - y = 0$, como queríamos.

Exemplo 3. *Obtenha um número tal que o dobro de seu quadrado seja igual a seu sêxtuplo.*

Solução. Seja x o número que queremos encontrar. Interpretando o enunciado, temos que:

$$\begin{aligned} 2x^2 = 6x &\Leftrightarrow 2x^2 - 6x = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x(x-3) = 0 \\ &\Leftrightarrow x(x-3) = 0. \end{aligned}$$

Temos então que $x = 0$ ou $x - 3 = 0$. Logo, há dois possíveis números x que satisfazem o enunciado: 0 e 3. □

Revendo as equações dos exemplos anteriores e comparando com o formato $ax^2 + bx + c = 0$, temos que:

(a) No Exemplo **??**: $x^2 - 36 = 0$, logo $a = 1$, $b = 0$, $c = -36$.

(b) No Exemplo **??**: $2x^2 - 6x = 0$, logo $a = 2$, $b = -6$, $c = 0$.

O Exemplo **??** é simples pois $b = 0$, e o Exemplo **??** é simples pois $c = 0$. No exemplo a seguir, temos uma situação um pouco mais complicada, pois a, b e c serão todos diferentes de 0.

Exemplo 4. *Encontre dois números naturais ímpares consecutivos cujo produto seja igual a* 195*.*

Solução. Chamando de x o menor dos números procurados, temos que o maior deles será $x + 2$. Logo,

$$\begin{aligned} x(x+2) = 195 &\Leftrightarrow x^2 + 2x = 195 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 2x - 195 = 0. \end{aligned}$$

Temos aqui, uma equação do segundo grau. Diferentemente dos exemplos anteriores, agora não é óbvio como poderíamos fatorar o lado esquerdo. Para fazer isso, vamos usar uma técnica chamada de "completamento de quadrados". Aqui, isso pode ser feito lembrando do produto notável $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$. Vamos, então, somar 1 a ambos os lados da equação original, obtendo:

$$(x^2 + 2x + 1) - 195 = 0 + 1 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 196.$$

Agora ficou fácil: como $196 = 14^2$, temos que $x + 1 = 14$ ou $x + 1 = -14$. Logo $x = 13$ ou $x = -15$. Por fim, como o enunciado diz que x deve ser um número natural, a única opção válida é $x = 13$. Logo, os dois números procurados, x e $x + 2$, são iguais a 13 e 15. $\square$

Na próxima seção, exploramos com detalhes a técnica de completamento de quadrados.

2 Como completar quadrados?

O passo essencial para completarmos quadrados é lembrarmo-nos dos dois produtos notáveis a seguir:

$$(x + k)^2 = x^2 + 2kx + k^2,$$
$$(x - k)^2 = x^2 - 2kx + k^2.$$

Em cada uma das igualdades acima, o lado direito é chamado de **trinômio quadrado perfeito**, em referência ao fato de que é o resultado de elevar ao quadrado uma expressão polinomial (a expressão $x + k$, na igualdade da primeira linha, e a expressão $x - k$, na igualdade da segunda linha).

É comum pensarmos em x como uma incógnita real e em k como um valor real já conhecido. Uma vez que o coeficiente de x^2 é igual a 1, a condição essencial para termos um trinômio quadrado perfeito é que o valor do termo independente de x (ou seja, k^2) possa ser obtido começando com o valor do coeficiente de x (ou seja, $\pm 2k$), dividindo tal valor por 2 (obtendo $\pm k$) e, finalmente, elevando o resultado ao quadrado (obtendo k^2).

Exemplo 5. *Identifique se a expressão $x^2 - 18x + 91$ é um trinômio quadrado perfeito. Em seguida, encontre as raízes da equação $x^2 - 18x + 91 = 0$.*

Solução. Primeiro checamos que o coeficiente de x^2 é igual a 1. O valor do coeficiente de x é igual a 18, de forma que $2k = 18$. A metade deste valor é igual a 9. Por fim, $9^2 = 81$, que é o valor do termo independente. Logo, temos sim um trinômio quadrado perfeito. Ademais, identificamos que $k = 9$, de sorte que $x^2 - 18x + 81 = (x - 9)^2$.

Agora, se tivermos $x^2 - 18x + 91 = 0$, então $(x - 9)^2 = 0$. Isso, por sua vez, só ocorre quando $x - 9 = 0$, ou seja, quando $x = 9$. □

Os dois exemplos a seguir seguem os mesmos passos do exemplo anterior, ainda que de forma mais resumida.

Exemplo 6. *A expressão* $x^2 + 6x + 9$ *é um trinômio quadrado perfeito, pois* $(6/2)^2 = 3^2 = 9$. *Por outro lado,* $x^2 + 8x + 10$ *não é um trinômio quadrado perfeito pois* $(8/2)^2 = 4^2 = 16 \neq 10$.

Exemplo 7. *A expressão* $x^2 + 2\sqrt{2}x + 2$ *também é um trinômio quadrado perfeito, apesar de um dos coeficientes envolvidos ser irracional. De fato,* $(2\sqrt{2}/2)^2 = (\sqrt{2})^2 = 2$. *De forma semelhante,* $x^2 + 3x + 9/4$ *também é um trinômio quadrado perfeito, pois* $(3/2)^2 = 9/4$.

Se tivermos uma expressão do tipo $x^2 - bx$, *completar quadrados* significa somar algum termo a ela de modo que o resultado seja um trinômio quadrado perfeito. Pelo que vimos acima, o termo que devemos acrescentar é obtido tomando o valor do coeficiente de x, ou seja, $\pm b$, dividindo-o por 2 e elevando o resultado ao quadradro, obtendo assim $(b/2)^2$.

O resultado é:

$$x^2 - bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = x^2 - 2\left(\frac{b}{2}\right)x + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{b}{2}\right)^2.$$

O caso em que o sinal "−" (menos) é trocado por "+" (mais) é semelhante e fornece

$$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = x^2 + 2\left(\frac{b}{2}\right)x + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2.$$

Para tratar os casos $x^2 + bx$ e $x^2 - bx$ de uma única vez, podemos usar o sinal "±", que pode ser substituído tanto pelo sinal "+" como pelo de "−", subentendendo-se que todas as ocorrências de $\pm$ dentro de uma equação assumem o mesmo valor.

É claro que, ao somarmos o termo $(b/2)^2$ com a expressão $x^2 \pm bx$, o valor final será diferente do valor original da expressão. Portanto, se quisermos obter o mesmo valor original, é necessário subtrair novamente o termo $(b/2)^2$. Assim, obtemos:

$$\begin{aligned} x^2 \pm bx &= x^2 \pm bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 \\ &= \left(x \pm \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Alternativamente, quando temos uma equação do tipo $x^2 \pm bx = r$, ao somarmos $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ a ambos os lados, obtemos:

$$\begin{aligned} x^2 \pm bx = r &\Leftrightarrow x^2 \pm bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + r \\ &\Leftrightarrow \left(x \pm \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + r. \end{aligned}$$

Também é possível usar uma técnica semelhante com expressões em que o coeficiente de x^2 seja diferente de 1. Para tanto, basta fazer inicialmente uma *mudança de variável*. Por exemplo, se de início tivermos a expressão $9x^2 + 5x$, começamos observando que $9x^2 = (3x)^2$; em seguida, basta substituir $3x$ por y, ou seja $x = y/3$, para obter

$$9x^2 + 5x = (3x)^2 + 5x = y^2 + 5 \cdot \frac{y}{3} = y^2 + \frac{5}{3}y.$$

A partir daí, podemos obter o trinômio quadrado perfeito $\left(y + \frac{5}{6}\right)^2$ somando $(5/6)^2$ a ambos os lados. Outra alternativa é observar diretamente que:

$$\begin{aligned} 9x^2 + 5x + \left(\frac{5}{6}\right)^2 &= (3x)^2 + 2 \cdot (3x) \cdot \frac{5}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 \\ &= \left(3x + \frac{5}{6}\right)^2. \end{aligned}$$

Em todo caso, como veremos em exemplos da seção seguinte, se tivermos uma equação $ax^2 + bx = r$, com $a \neq 0$, costuma ser mais fácil simplesmente dividir ambos os lados por a, a fim de obter rapidamente uma expressão em que o coeficiente de x^2 seja igual a 1.

3 Exemplos de aplicações

Comecemos examinando alguns exemplos em que equações do segundo grau surgem de forma indireta.

Exemplo 8. *A diferença entre as idades de dois irmãos é igual a 3 anos, e o produto de suas idades é 270. Qual a idade de cada um?*

Solução. Sejam x e y as idades dos dois irmãos. Interpretando os dados, obtemos o sistema de equações:

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ \;\; x \cdot y = 270. \end{cases}$$

Da primeira equação, obtemos $x = y + 3$. Substituindo tal expressão para x na segunda equação, obtemos:

$$(y + 3) \cdot y = 270$$

ou, o que é o mesmo,

$$y^2 + 3y = 270.$$

Agora, para resolver a equação, vamos completar quadrados, isto é, somar algo aos dois lados da equação, a fim de obter um trinômio quadrado perfeito no lado esquerdo. Como visto na seção anterior, basta somarmos $(\frac{3}{2})^2$, para obter sucessivamente:

$$y^2 + 3y + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 270 + \left(\frac{3}{2}\right)^2$$
$$\left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = 270 + \left(\frac{3}{2}\right)^2$$
$$\left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1089}{4}.$$

Como $\sqrt{\dfrac{1089}{4}} = \dfrac{33}{2}$, conclui-se que:

$$y + \frac{3}{2} = \frac{33}{2} \quad \text{ou} \quad y + \frac{3}{2} = -\frac{33}{2}.$$

Portanto,

$$y = \frac{30}{2} = 15 \quad \text{ou} \quad y = -\frac{36}{2} = -18.$$

Mas, pelo enunciado do problema, y é a idade de uma pessoa, logo, um número positivo. Assim, a única opção válida é $y = 15$. Por fim, lembrando que $x = y + 3$, chegamos a $x = 15 + 3 = 18$. Temos, então, que as idades são 15 e 18. □

Exemplo 9. *Calcule as dimensões de um retângulo, sabendo que seu perímetro é* $16\,\text{cm}$ *e sua área é* $15\,\text{cm}^2$*.*

Solução. Vamos chamar de x e y as medidas de dois lados perpendiculares do retângulo. Lembrando que o perímetro é igual à soma das medidas dos quatro lados do retângulo, concluímos que ele vale $2x + 2y$. Por outro lado, a área do retângulo é igual a $x \cdot y$. Assim, temos que:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 16 \\ xy = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 8 \\ xy = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 8 - x \\ xy = 15 \end{cases}.$$

Substituindo na segunda equação o valor para y obtido na primeira equação, obtemos $x(8-x) = 15$, ou ainda $8x - x^2 =$

15. Para completar quadrados, vamos precisar que o coeficiente de x^2 seja igual a 1; por isso, reescrevemos a equação como:

$$x^2 - 8x = -15.$$

Agora, basta somar $\left(\frac{8}{2}\right)^2$, ou seja, 4^2, a ambos os lados da última equação para obter sucessivamente

$$x^2 - 8x + 4^2 = -15 + 4^2$$
$$(x-4)^2 = 1.$$

Logo,

$$x - 4 = 1 \text{ ou } x - 4 = -1,$$

de sorte que

$$x = 5 \text{ ou } x = 3.$$

(Veja que, dessa vez, ambas as opções são possíveis.)

Para terminar, devemos encontrar o valor de y em cada caso. Como $y = 8 - x$, temos:

$$x = 5 \implies y = 3.$$
$$x = 3 \implies y = 5.$$

Ora, mas em ambos os casos, o conjunto das medidas dos lados, $\{x, y\}$, é igual a $\{3, 5\}$, e a troca de um pelo outro muda no máximo a ordem em que os lados são desenhados. Assim, as medidas em questão são 3 cm e 5 cm. □

Exemplo 10. *Um pai tinha 30 anos quando seu filho nasceu. Se multiplicarmos as idades que eles possuem hoje, obtemos um produto que é igual a três vez o quadrado da idade do filho. Calcule as idades de ambos.*

Solução. Vamos chamar de x a idade que o filho tem hoje. Como o pai tinha 30 anos quando o filho nasceu, temos que o pai é 30 anos mais velho que o filho, ou seja, a idade que o pai tem hoje é $x+30$. Interpretando o restante do enunciado, temos:

$$x \cdot (x + 30) = 3x^2.$$

Portanto,

$$x^2 + 30x = 3x^2 \Leftrightarrow 2x^2 = 30x \Leftrightarrow 2x^2 - 30x = 0$$
$$\Leftrightarrow 2x(x - 15) = 0,$$

de modo que

$$x = 0 \text{ ou } x - 15 = 0.$$

Podemos descartar a opção em que $x = 0$, pois caso contrário não existiria filho. Portando, a idade do filho é 15 anos e a idade do pai é $15 + 30 = 45$ anos. □

Exemplo 11. *Resolva a equação do segundo grau* $3x^2 - 15x + 18 = 0$ *usando o método de completar quadrados.*

Solução. Obter um trinômio quadrado perfeito no lado esquerdo é mais fácil quando o coeficiente de x^2 é igual a 1. Assim, vamos começar simplificando a equação, dividindo ambos os lados por 3 para obter:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

ou, ainda,

$$x^2 - 5x = -6.$$

Para obter um trinômio quadrado perfeito do lado esquerdo, precisamos somar $(5/2)^2$ a ambos os lados. Assim fazendo, temos sucessivamente

$$x^2 - 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = -6 + \left(\frac{5}{2}\right)^2.$$
$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = -6 + \frac{25}{4}.$$
$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Conclui-se, então, que:

$$x - \frac{5}{2} = \frac{1}{2} \text{ ou } x - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2}$$

No primeiro caso, obtemos

$$x = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = \frac{6}{2} = 3;$$

no segundo,

$$x = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

Assim, temos duas soluções válidas: $x = 2$ ou $x = 3$. $\square$

Na segunda parte deste material veremos como generalizar a discussão do exemplo anterior a uma equação de segundo grau genérica.

Dicas para o Professor

Sugerimos que o conteúdo desta aula seja tratado em dois ou três encontros de 50 minutos, com amplo tempo destinado à resolução de exercícios.

O domínio adequado dos métodos de resolução de equações do segundo grau mais simples, como as discutidas aqui, é essencial para a compreensão do significado e da dedução da fórmula de Bhaskara, ainda que eventualmente passemos a utilizá-la sem lembrar os detalhes da demonstração.

As referências abaixo discutem equações de segundo grau exaustivamente, contemplando tanto o material discutido aqui quanto aquele porvir.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 1: Números Reais.* Terceira edição. SBM, Rio de Janeiro, 2024.

2. G. Iezzi *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 1: Números Reais e Funções.* Atual Editora, Rio de Janeiro, 2013.