Material Teórico - Módulo de Introdução ao Cálculo - Derivada como Função

Propriedades - Parte I

Tópicos Adicionais

Autor: Tiago Caúla Ribeiro
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

13 de Setembro de 2023

Nesta aula, estudaremos alguns aspectos da relação que uma função derivável f guarda com sua função derivada f'. No teorema 2, veremos como a mera existência de f' garante a continuidade de f. Já no teorema 7, expõe-se a conexão entre o sinal da derivada f' e a monotonicidade de f. Por último, na 2ª parte desta aula, apresentaremos a relação entre a monotonicidade de f' e a concavidade do gráfico de f.

1 A regra da soma/diferença e a regra do múltiplo constante

As seguintes regras de derivação são bastante úteis:

$$(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a) \tag{1}$$

e

$$(c \cdot f)'(a) = c \cdot f'(a), \tag{2}$$

em que c é um número real e $f, g : I \to \mathbb{R}$ são funções deriváveis no ponto $a \in I$. As justificativas são simples. Por exemplo, a regra da soma/diferença (1) segue diretamente da relação

$$\frac{(f \pm g)(x) - (f \pm g)(a)}{x - a} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \pm \frac{g(x) - g(a)}{x - a},$$

quando se faz $x \to a$.

Costumamos expressar as regras acima como: "a derivada da soma/diferença é a soma/diferença das derivadas" e "a derivada de uma constante vezes a função é a constante vezes a derivada da função".

Se utilizarmos a notação de Leibniz, com $y = f(x)$ e $z = g(x)$, as regras anteriores assumem a forma

$$\left.\frac{d(y \pm z)}{dx}\right|_{x=a} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} \pm \left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=a} \tag{3}$$

e

$$\left.\frac{d(c \cdot y)}{dx}\right|_{x=a} = c \cdot \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}. \tag{4}$$

É evidente que, se f e g forem deriváveis, as fórmulas (1) e (2) se traduzem como relações entre as funções derivadas:

$$(f \pm g)' = f' \pm g' \quad \Big(\text{ou} \quad \frac{d(y \pm z)}{dx} = \frac{dy}{dx} \pm \frac{dz}{dx}\Big)$$

e

$$(c \cdot f)' = c \cdot f' \quad \Big(\text{ou} \quad \frac{d(c \cdot y)}{dx} = c \cdot \frac{dy}{dx}\Big).$$

Na 2ª parte desta aula, introduziremos as *regras da derivada do produto e da derivada do quociente*, reservando para o módulo seguinte, que é dedicado inteiramente às fórmulas/regras de derivação, o estudo da *regra da cadeia.* [1]

Exemplo 1. *Calcule* $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=1}$ *se* $y = 5x^2 - \ln x^3 + e^x/2$.

Solução. Escrevendo $y = 5x^2 - 3\ln x + (1/2)e^x$, as regras (3), (4) e as fórmulas vistas na aula anterior dão

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx}\Big|_{x=1} &= \left[5\frac{d(x^2)}{dx} - 3\frac{d(\ln x)}{dx} + \frac{1}{2}\frac{d(e^x)}{dx}\right]\Big|_{x=1} \\ &= \left[5 \cdot (2x) - 3 \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \cdot e^x\right]\Big|_{x=1} = 7 + \frac{e}{2}. \end{aligned}$$

□

2 Continuidade versus diferenciabilidade

Nesta seção, $f : I \to \mathbb{R}$ é uma função real definida no subconjunto $I \subset \mathbb{R}$.

Teorema 2. *Se f é derivável no ponto $a \in I$, então f é contínua em a. Portanto, toda função derivável é contínua.*

Prova. Basta provar que $f(x) - f(a)$ tende a 0 quando $x \to a$. De fato,

$$\lim_{x \to a}[f(x) - f(a)] = \lim_{x \to a}(x - a)\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 0 \cdot f'(a) = 0.$$

[1] A regra básica para o cálculo da derivada de uma função composta.

$\square$

Observação 3. *A função modular é contínua, porém não derivável (na origem), de onde se conclui que é falsa a recíproca do teorema acima.* [2]

Uma versão mais forte do teorema 2 é a seguinte [3]

Proposição 4. *Se existem as derivadas laterais (que façam sentido) de f no ponto a, então f é contínua em a.*

Basta repetir o cálculo feito na prova do teorema 2 usando limites laterais. Assim fazendo, ainda teremos

$$\lim_{x \to a^-} [f(x) - f(a)] = 0 \cdot f'_-(a) = 0$$

e

$$\lim_{x \to a^+} [f(x) - f(a)] = 0 \cdot f'_+(a) = 0,$$

de onde segue a igualdade $\lim_{x \to a} [f(x) - f(a)] = 0$, isto é,

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Na 3ª parte da aula, aplicaremos a proposição 4 ao estudo da continuidade das funções convexas.

3 O sinal da primeira derivada

Daqui em diante, $f : I \to \mathbb{R}$ será uma função real definida no ***intervalo*** $I \subset \mathbb{R}$.

O próximo teorema estabelece uma relação entre o sinal da função derivada e a monotonicidade da respectiva função. Antes, segue uma versão "pontual" do resultado.

[2] Conforme comentamos na aula anterior, existem funções contínuas sem derivada em ponto nenhum.

[3] Para recordar o conceito de derivada lateral, consulte a seção 1 da primeira aula do módulo anterior.

Lema 5. *Se f é derivável no ponto $a \in I$ e $f'(a) > 0$, então f é* crescente *no ponto a, ou seja, para cada $x,\widetilde{x} \in I$, suficientemente próximos de a, vale que*

$$x < a < \widetilde{x} \Rightarrow f(x) < f(a) < f(\widetilde{x}).$$

Prova. Como

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) > 0,$$

o lema de permanência do sinal garante que $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0$ para todo $x \in I \setminus \{a\}$ suficientemente próximo de a. Assim, para tais x, as expressões $x - a$ e $f(x) - f(a)$ têm mesmo sinal, de onde se obtém a conclusão do lema. $\square$

Observação 6. *Invertendo os sinais na demonstração acima, prova-se que $f'(a) < 0$ implica f* decrescente *no ponto a: para quaisquer $x,\widetilde{x} \in I$, suficientemente próximos de a, tem-se que*

$$x < a < \widetilde{x} \Rightarrow f(x) > f(a) > f(\widetilde{x}).$$

Por sua vez, essas conclusões procedentes do sinal da derivada implicam o seguinte fato importante (que será retomado num módulo futuro): se f assume um extremo local em um ponto a, interior ao intervalo I, então $f'(a) = 0$ ou f não é derivável em a. *De fato, sendo a um ponto de extremo local*[4]*, a função f não cresce nem decresce em a, pois a é interior ao intervalo I. Daí, se existe $f'(a)$, devemos ter $f'(a) \leq 0$ e $f'(a) \geq 0$, resultando na nulidade de $f'(a)$.*

Teorema 7. *Se f é derivável, então:*

(i) $f' > 0$ em $I \Rightarrow f$ crescente.

(ii) $f' < 0$ em $I \Rightarrow f$ decrescente.

Prova. Suponha que já tenhamos demonstrado (i). Então, se $f' < 0$, a função $g := -f$ é derivável e $g' = -f' > 0$, de modo que g é crescente e, daí, $f = -g$ é decrescente.

[4]Leia-se: "a é ponto de mínimo local" ou "a é ponto de máximo local".

Tendo provado que (i)$\Rightarrow$(ii), basta justificar o primeiro item. Para tanto, sejam $x_0,y_0 \in I$ com $x_0 < y_0$. Precisamos verificar a desigualdade

$$f(x_0) < f(y_0). \tag{5}$$

Com efeito, f é contínua pelo teorema 2. Assim, o teorema dos valores extremos (teorema 9 da aula *Continuidades Laterais e em um Intervalo*) assegura que a restrição de f ao intervalo $[x_0,y_0]$ assume um valor mínimo m. Fixado $a \in (x_0,y_0]$, a hipótese $f'(a) > 0$ garante, pelo lema 5, que a não é ponto de mínimo de f, uma vez que $m \leq f(x) < f(a)$ para todo $x \in (x_0,a)$ suficientemente próximo de a. Logo, o valor mínimo de $f|_{[x_0,y_0]}$ deve ser assumido, exclusivamente, no ponto x_0, de onde segue a desigualdade (5). $\square$

Observação 8. *A recíproca do teorema anterior é falsa: a cúbica $f(x) = x^3, x \in \mathbb{R}$, é derivável e crescente, mas $f'(0) = 0$. Contudo, confira o exemplo 15.*

Observação 9. *O teorema 7 continuará válido mesmo se a exigência sobre o sinal da derivada considerar apenas os pontos* interiores *ao intervalo I. Por exemplo, ainda supondo $f: I \to \mathbb{R}$ derivável* [5], se $f' > 0$ no interior de I, então f é crescente. *De fato, certamente f é crescente no interior de I, pelo teorema 7. Agora, digamos que α (resp. β), o extremo inferior (resp. superior) de I, pertença a esse intervalo. Só precisamos provar que $f(\alpha) < f(x_0)$ (resp. $f(x_0) < f(\beta)$), para todo x_0 no interior de I. Para isso, fixe $c \in (\alpha,x_0)$ e note que $f(x) < f(c) < f(x_0)$, para cada $x \in (\alpha,c)$. Pelo teorema 2, f é contínua em α, de sorte que, pela permanência do sinal,*

$$f(\alpha) = \lim_{x\to\alpha^+} f(x) \leq f(c) < f(x_0).$$ [6]

A próxima proposição registra um teste útil para determinar extremos (globais) de uma função.

---

[5] Ou, mais geralmente, contínua (em I) e derivável no interior de I.

[6] O leitor pode completar o argumento, provando, caso $\beta \in I$, a desigualdade $f(x_0) < f(\beta)$.

Corolário 10. *Sejam $f : I \to \mathbb{R}$ derivável e a um ponto interior ao intervalo I. Se*

- $f'(x) < 0 < f'(y)$ *para quaisquer* $x < a < y, x,y \in I$, *então a é* ponto de mínimo estrito *de f, ou seja,*

$$x \in I \setminus \{a\} \Rightarrow f(x) > f(a).$$

- $f'(x) > 0 > f'(y)$ *para quaisquer* $x < a < y, x,y \in I$, *então a é* ponto de máximo estrito *de f, isto é,*

$$x \in I \setminus \{a\} \Rightarrow f(x) < f(a).$$

Prova. A 2ª parte segue da primeira, ao trocarmos f por $-f$. Então, suponhamos $f'(x) < 0$ para cada $x < a, x \in I$, e $f'(x) > 0$ para cada $x > a, x \in I$. Pelo teorema 7 e observação 9, a restrição de f ao intervalo $(-\infty,a] \cap I$ é decrescente, enquanto a restrição de f ao intervalo $[a,+\infty) \cap I$ é crescente. Segue o resultado. □

4 Exemplos

Exemplo 11. *Considere a função cúbica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^3 + 3x - 4$. Mostre que f é uma bijeção crescente, a qual admite inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável, e calcule $(f^{-1})'(10)$.*

Solução. A função f tem derivada positiva, pois $f'(x) = 3x^2 + 3 \geq 3$, para cada número real x. Pelo teorema 7, f é crescente e, em particular, injetiva. Pelo exemplo 3 da aula *Continuidades Laterais e em um Intervalo*, f é sobrejetiva, de onde segue sua bijetividade. Além disso, como a derivada de f nunca se anula, a inversa f^{-1} é derivável, de acordo com o teorema 6 da aula *Reta Tangente - Parte I*. Mais ainda, se $f(x) = y$, esse mesmo teorema dá

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{3x^2 + 3}.$$

Para finalizar, observando que $f(2) = 10$, obtemos (com $y = 10$ e $x = 2$ na relação acima)

$$(f^{-1})'(10) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{3 \cdot 2^2 + 3} = \frac{1}{15}.$$

□

Exemplo 12. *Prove que*

$$x > 0 \Rightarrow \ln x \le x - 1,$$

com igualdade se, e só se, $x = 1$. [7]

Solução. Vamos provar que $a = 1$ é ponto de mínimo estrito da função $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x - 1 - \ln x$. Assim sendo, $0 < x \ne 1 \Rightarrow f(x) > f(1) = 0$, ou melhor,

$$0 < x \ne 1 \Rightarrow x - 1 - \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < x - 1,$$

de forma que $\ln x = x - 1$ se, e só se, $x = 1$.

Para justificar a afirmação do parágrafo anterior, primeiro utilizamos a regra 1 para concluir a diferenciabilidade de f e a fórmula $f'(x) = 1 - 1/x$, para cada $x > 0$. Daí, é claro que $f'(x) < 0$ se $0 < x < 1$, enquanto $f'(x) > 0$ caso seja $x > 1$. Pelo corolário 10, $a = 1$ é ponto de mínimo estrito de f. □

Exemplo 13. *Considere uma esfera* $\mathcal{E}$ *e um cilindro circular* $\mathcal{C}$*, inscrito em* $\mathcal{E}$*. Se* $V(S)$ *denota o volume de um sólido* S*, calcule o maior valor possível da razão* $V(\mathcal{C})/V(\mathcal{E})$*.*

Solução. Sejam r o raio e h a altura de $\mathcal{C}$. Observe que esse cilindo é *reto*, pois está incrito numa esfera. Logo, pelo teorema de Pitágoras, temos $r^2 = R^2 - (h/2)^2$, sendo R o raio de $\mathcal{E}$ (acompanhe na figura abaixo). Portanto, se $V(h)$ é o volume de $\mathcal{C}$, temos $V(h) = \pi r^2 h$, ou seja,

$$V(h) = \pi\left(R^2 h - \frac{h^3}{4}\right).$$

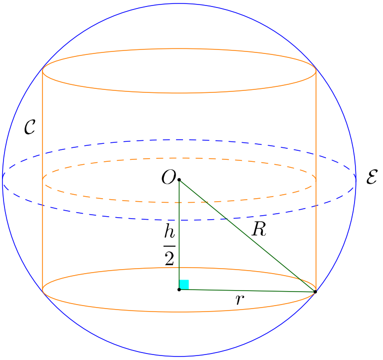

Figura 1: cilindro $\mathcal{C}$ incrito na esfera $\mathcal{E}$ de centro O.

Note que a regra acima define uma função derivável $V : (0{,}2R) \to \mathbb{R}$, sendo $V'(h) = \pi\left(R^2 - \frac{3h^2}{4}\right)$. Daí,

$$V'(h)\begin{cases} > 0, \text{ se } 0 < h < \frac{2R}{\sqrt{3}} \\ < 0, \text{se } \frac{2R}{\sqrt{3}} < r < 2R \end{cases},$$

o que, de acordo com o corolário 10, permite concluir a relação

$$V(h) \leq V(2R/\sqrt{3}), \tag{6}$$

com igualdade se, e só se, $h = 2R/\sqrt{3}$. Observando que

$$\begin{aligned} V(2R/\sqrt{3}) &= \pi\left(R^2\frac{2R}{\sqrt{3}} - \frac{(2R/\sqrt{3})^3}{4}\right) \\ &= \frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}V(\mathcal{E}), \end{aligned}$$

[7]Compare com o exemplo 11 da última aula do módulo *Função Logarítmica*, primeiro ano - médio. Observe também que essa desigualdade permite uma demonstração da desigualdade entre as médias, conforme a solução do exemplo 12 da referida aula.

podemos reescrever a desigualdade (6) como

$$V(h) \leq \frac{1}{\sqrt{3}} V(\mathcal{E}),$$

ou melhor,

$$\frac{V(\mathcal{C})}{V(\mathcal{E})} = \frac{V(h)}{V(\mathcal{E})} \leq \frac{1}{\sqrt{3}},$$

com igualdade se, e só se, $h = 2R/\sqrt{3}$. Assim, o valor máximo de $V(\mathcal{C})/V(\mathcal{E})$ é $1/\sqrt{3}$.

□

Observação 14. *O exemplo anterior admite uma solução mais elementar, no sentido de que podemos evitar ferramentas do cálculo diferencial. Basta lembrar da desigualdade entre as médias aritmética e geométrica (para os quadrados de três números positivos a, b, c):*

$$\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \leq \frac{a^2+b^2+c^2}{3},$$

que convém ser reescrita na forma

$$abc \leq \left(\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\right)^{3/2}, \tag{7}$$

com igualdade se, e só se, $a = b = c$ (vide [1]). Portanto, tomando em (7) $a = b = \sqrt{2}r$ e $c = h$, vem que

$$\begin{aligned} V(h) = \pi r^2 h &= \frac{\pi}{2}(\sqrt{2}r)(\sqrt{2}r)h \\ &\leq \frac{\pi}{2}\left(\frac{(\sqrt{2}r)^2 + (\sqrt{2}r)^2 + h^2}{3}\right)^{3/2} \\ &= \frac{\pi}{2}\left(\frac{4r^2+h^2}{3}\right)^{3/2} \\ &= \frac{\pi}{2}\left(\frac{4R^2}{3}\right)^{3/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}V(\mathcal{E}), \end{aligned}$$

com igualdade se, e somente se, $\sqrt{2}r = h$, ou seja, se, e só se, $h = 2R/\sqrt{3}$.

Exemplo 15. *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ derivável no intervalo I. Então:*

(i) $f' \geq 0$ *em I se, e só se, f é monótona não-decrescente.*

(ii) $f' \leq 0$ *em I se, e só se, f é monótona não-crescente.*

Solução. Como na demonstração do teorema 7, basta provar (i). Para isso, suponhamos $f' \geq 0$. Fixado $\varepsilon > 0$, defina $g : I \to \mathbb{R}$ por $g(x) = f(x) + \varepsilon x$, de forma que g é derivável e $g'(x) = f'(x) + \varepsilon > 0$, para cada $x \in I$. Pelo teorema 7, g é crescente, ou seja,

$$x,y \in I, x < y \Rightarrow f(x) + \varepsilon x < f(y) + \varepsilon y.$$

Fazendo $\varepsilon \to 0^+$ na última desigualdade, vemos que

$$x,y \in I, x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y),$$

isto é, f é monótona não-decrescente.

Reciprocamente, se f é monótona não-decrescente, fixado $a \in I$, vale

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0,$$

para cada $x \in I \setminus \{a\}$. Fazendo $x \to a$ nessa desigualdade, o teorema da permanência do sinal dá $f'(a) \geq 0$, ou seja, $f' \geq 0$ em I. □

Exemplo 16 (OBMU). *Determine todas as funções deriváveis $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tais que $f(0) = 0$ e $|f'(x)| \leq |f(x)|$, para cada número real x.*

Solução. É claro que a função identicamente nula satisfaz as condições do problema. Afirmamos que ela é a única.

Por contradição, suponha que existisse uma função derivável e não identicamente nula $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $f(0) = 0$ e $|f'(x)| \leq |f(x)|$, para cada número real x. Então, deveria existir um número real c tal que $f(c) \neq 0$.

Não há perda de generalidade em supor c e $f(c)$ positivos. Desse modo, mostraremos a existência de números reais a e

b tais que $0 \leq a < b < a+1$ e $0 = f(a) < f(x) \leq f(b)$, para cada $x \in (a,b]$.

Com efeito, pelo exemplo 24 da aula *Continuidade em um ponto - Parte III*, a equação $f(x) = 0$, com $0 \leq x \leq c$, admite uma maior solução $a \in [0,c)$.

Em particular, $f(x) \neq 0$ para cada $x \in (a,c]$, o que, pelo TVI e pela relação $f(c) > 0$, implica $f(x) > 0$ para todo $x \in (a,c]$. Se $d = \min\{a+1/2,c\}$, basta, agora, tomar b como um ponto de máximo da restrição $f|_{[a,d]}$.

Tendo construído a e b, observamos que

$$x \in [a,b] \Rightarrow f'(x) \leq |f'(x)| \leq f(x) \leq f(b),$$

isto é, $f(b) - f'(x) \geq 0$, para cada $x \in [a,b]$.

Com o exemplo anterior em mente, parece ser uma boa ideia construir uma função derivável g cuja derivada, em cada ponto $x \in [a,b]$, seja o primeiro membro da última desigualdade.

De fato, podemos definir $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ por $g(x) = f(b)x - f(x)$. Sendo $g'(x) = f(b) - f'(x) \geq 0$, para cada $a \leq x \leq b$, o exemplo 15 garante que g é monótona não-decrescente.

Em particular, $g(a) \leq g(x)$, ou seja,

$$f(b)a - f(a) \leq f(b)x - f(x) \Leftrightarrow f(x) \leq f(b)(x-a), \quad (8)$$

qualquer que seja $x \in [a,b]$.

Fazendo $x = b$ nessa desigualdade, vem que $f(b) \leq f(b)(b-a) < f(b)$, posto que $b - a < 1$ e $f(b)$ é positivo. Essa contradição mostra que nenhuma função não identicamente nula pode satisfazer as condições do enunciado. Logo, a função identicamente nula é a única solução.

$\square$

Exemplo 17. *Se* $f : I \to \mathbb{R}$ *é derivável,* $a \in I$ *e existe* $L = \lim_{x\to a^-} f'(x)$ *(resp.* $M = \lim_{x\to a^+} f'(x)$*), mostre que* $L = f'(a)$ *(resp.* $M = f'(a)$*). Conclua que as possíveis descontinuidades da função derivada* $f' : I \to \mathbb{R}$ *são, necessariamente,* essenciais [8].

[8] Vide observação 4 da aula *Continuidade em um ponto - Parte III.*

Solução. Se fosse $L \neq f'(a)$, teríamos de analisar dois casos: (i) $L < f'(a)$; (ii) $L > f'(a)$. Por *analogia do argumento*, trataremos apenas do caso em que $L < f'(a)$.

Sendo assim, basta seguir a linha de raciocínio do exemplo anterior, definindo $g : I \to \mathbb{R}$ por $g(x) = kx - f(x)$, onde $k \in (L, f'(a))$ foi fixado. Daí, segue que g é derivável, $g'(x) = k - f'(x)$ para todo $x \in I$ e $\lim_{x\to a^-} g'(x) = k - L > 0$.

Pela permanência do sinal, vale $g'(x) > 0$ para todo $x < a$ suficientemente próximo de a, de modo que g é crescente em algum intervalo J da forma $[a - \delta, a]$, pela observação 9.

Em particular, $g|_J$ cresce no ponto a, o que implica $g'(a) \geq 0$, pelo lema 5. Por outro lado, $g'(a) = k - f'(a) < 0$, uma contradição.

Por fim, uma vez que a sentença $L \neq f'(a)$ é falsa, devemos ter $L = f'(a)$.

$\square$

Dicas para o Professor

Ao lidarmos com problemas de Cálculo em uma variável, uma ótima estratégia para compor nosso repertório argumentativo é aliar a interpretação do sinal da derivada, por meio do lema 5, ao teorema dos valores extremos (confira a prova do teorema 7 e a solução do exemplo 16).

De certo modo, esse tipo de argumento é absorvido e, com vantagem, substituído por um resultado fundamental, a saber, o *teorema do valor médio*, que devemos estudar em um módulo futuro.

Em consonância com o título da aula, convém ilustrar mais uma vez aquela estratégia para destacar a seguinte propriedade notável da função derivada: *se f é uma função derivável no intervalo I, então a derivada $f' : I \to \mathbb{R}$ goza da propriedade do valor intermediário, ou seja, se $f'(a) < d < f'(b)$ para certos $a,b \in I$, então existe c no intervalo aberto de extremos a e b com $f'(c) = d$.* Tal resultado é conhecido na literatura como o *teorema de Darboux*.

Para prová-lo, suponhamos, sem perda de generalidade, $a < b$ e consideremos a função auxiliar $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, dada por $g(x) = f(x) - dx$. Então, g é derivável e $g'(x) = f'(x) - d$, para cada $x \in [a,b]$, de sorte que $g'(a) < 0 < g'(b)$. Logo, o lema 5 garante que g decresce em a enquanto g cresce em b. Em particular, o valor mínimo de g (assegurado pelo teorema dos valores extremos) não pode ser assumido em a ou em b, ou seja, o valor mínimo de g deve ser assumido em um ponto $c \in (a,b)$. Pela observação 6, vale $g'(c) = 0$, ou ainda, $f'(c) = d$, como queríamos.

Para efeito de ilustração, considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$, para $x \neq 0$, e $f(0) = 0$. Então, com os resultados que estudaremos nas próximas aulas, pode-se provar que f é derivável, valendo

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \operatorname{sen}(1/x) - \cos(1/x), & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}.$$

Como $2x \operatorname{sen}(1/x) \to 0$ quando $x \to 0$, mas $\cos(1/x)$ não tende a limite algum, quando $x \to 0$, conclui-se que não existe o limite de $f'(x)$ quando x tende a 0. Em particular, f' é descontínua na origem, muito embora goze da propriedade do valor intermediário (pelo teorema de Darboux ou por verificação direta). [9]

O professor pode, se achar conveniente, intercalar teoria e exercícios da seguinte forma:

- Resolver os exemplos 11, 15 e 16 logo após o teorema 7.
- Terminada a discussão do corolário 10, tratar os exemplos 12 e 13.
- Encerrar com o exemplo 17. Caso enuncie o teorema de Darboux, pode ser interessante utilizá-lo para obter uma solução ligeiramente diferente daquela apresentada nesse exemplo. Com efeito, se, digamos, tivéssemos (nas notações daquele enunciado) $L < f'(a)$, escolheríamos $\delta > 0$ suficientemente pequeno para ter

$$f'(x) < \frac{L + f'(a)}{2} < f'(a),$$

para todo $x \in [a - \delta, a)$ (por que?), contradizendo a propriedade do valor intermediário de f'.

Três sessões de 50min devem ser suficientes para expor o conteúdo desse material.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, vol. 1. Números Reais.* 2ª ed. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2014.

[9] Perceba que, até então, nossa fonte natural de funções com a propriedade do valor intermediário consistia da classe $\mathcal{C}$ de funções contínuas definidas em intervalos. Com o teorema de Darboux, obtivemos uma nova classe de exemplos, a saber, a classe $\mathcal{D}'$ das funções derivada definidas em intervalos. Pelo exemplo dado, $\mathcal{D}' \not\subset \mathcal{C}$, ao passo que, com a teoria da integral, pode-se demonstrar a inclusão $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}'$. Portanto, o teorema de Darboux generaliza o teorema do valor intermediário (TVI)!