Material Teórico - Módulo: Vetores em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$

O Conceito de Vetor

Terceiro Ano do Ensino Médio

Autor: Prof. Angelo Papa Neto
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

1 Segmentos orientados

Nesta seção vamos estudar a noção de segmento orientado. Em particular, vamos definir uma relação entre segmentos orientados que permite dividir o conjunto de todos eles em *classes*, de forma tal que, dentro de uma mesma classe, os segmentos possam ser considerados essencialmente os mesmos.

Um segmento AB é dito **orientado** quando há uma distinção entre os pontos A e B que o determinam, sendo um deles chamado **origem** e o outro **extremidade** do segmento orientado. Se o ponto A é a origem de um segmento orientado e o ponto B é a sua extremidade, denotamos esse segmento por AB e dizemos que o **sentido** da orientação de AB é de A para B. Se, por outro lado, B for a origem e A a extremidade, denotamos o segmento orientado por BA e dizemos que o sentido da orientação é de B para A. Escrevemos $BA = -AB$ para indicar que AB e BA são orientados em sentidos contrários.

Representamos geometricamente um segmento orientado AB por uma seta que aponta da origem A para a extremidade B (veja a Figura 1).

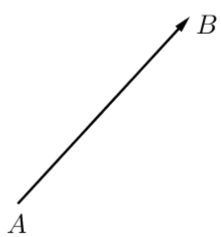

Figura 1: um segmento orientado AB.

Dois segmentos orientados AB e CD são ditos **equipolentes** se têm:

- O mesmo comprimento, isto é, $\overline{AB} = \overline{CD}$.
- A mesma direção, isto é, se r e s são as retas suporte de AB e CD, respectivamente, então $r = s$ ou $r \parallel s$.
- O mesmo sentido.

Comparar os sentidos de dois segmentos orientados AB e CD só é possível no caso em que eles têm a mesma direção. Neste caso, podemos orientar as retas r e s que os contêm, escolhendo um mesmo sentido de percurso para as mesmas (note que há a possibilidade de retas serem coincidentes). Os segmentos orientados AB e CD têm o mesmo sentido se, com a orientação escolhida para r e s, ambos apontarem no sentido de percurso de r e s, ou ambos apontam no sentido contrário ao sentido de percurso de r e s. Veja a figura a seguir.

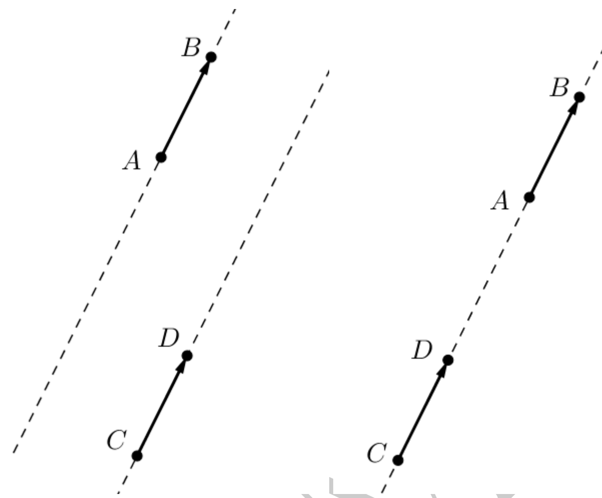

Figura 2: dois segmentos orientados equipolentes AB e CD, situados em retas paralelas (esquerda) e em uma mesma reta (direita).

Escrevemos $AB \equiv CD$ para indicar que AB e CD são dois segmentos orientados equipolentes.

A relação de equipolência entre segmentos orientados satisfaz três condições fundamentais:

Reflexividade: todo segmento orientado é equipolente a si mesmo, ou seja, $AB \equiv AB$, para todo segmento orientado AB.

Simetria: se um segmento orientado AB é equipolente a um segmento orientado CD, então CD é equipolente a AB, ou seja, se $AB \equiv CD$, então $CD \equiv AB$.

Transitividade: se um segmento orientado AB é equipolente a um segmento orientado CD e, por sua vez, CD é equipolente a um terceiro segmento orientado EF, então AB é equipolente a EF. Em símbolos: se $AB \equiv CD$ e $CD \equiv EF$, então $AB \equiv EF$.

Uma relação que é reflexiva, simétrica e transitiva é chamada **relação de equivalência**. Assim, a relação de equipolência entre segmentos orientados é uma relação de equivalência. Na próxima seção, veremos como usar a relação de equipolência para construir a noção de vetor.

No restante desta seção, estudaremos uma caracterização geométrica da relação de equipolência. Para tal, precisamos começar relembrando a noção de paralelogramo.

Um *paralelogramo* é um quadrilátero $ABCD$ tal que os pares de lados opostos, AB e CD, BC e DA, são paralelos. Lembremos que segmentos de reta são ditos paralelos se suas retas suporte forem paralelas.

O resultado a seguir dá duas caracterizações importantes de um paralelogramo.

Teorema 1. *Seja $ABCD$ um quadrilátero plano. As seguintes condições são equivalentes:*

(a) $ABCD$ é um paralelogramo.

(b) Os lados opostos de $ABCD$ são congruentes.

(c) As diagonais de $ABCD$ intersectam-se em seus pontos médios.

Prova. Assumindo a validade de (a), ou seja, admitindo que $ABCD$ é um paralelogramo, vamos mostrar que vale (b).

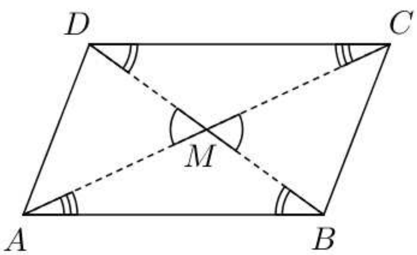

Figura 3: um paralelogramo $ABCD$, suas diagonais AC e BD e o ponto de interseção M.

Como AB é paralelo a CD, os ângulos $\angle ABD$ e $\angle BDC$ são alternos internos, logo congruentes, o mesmo ocorrendo para os ângulos $\angle ADB$ e $\angle CBD$, pois AD e BC também são paralelos. Assim, os triângulos ABD e CDB, que têm o lado BD em comum, são congruentes, pelo caso ângulo-lado-ângulo. Em particular, os lados AB e CD são congruentes.

De modo análogo, é possível provar que os triângulos ABC e CDA também são congruentes, logo os lados BC e DA são congruentes. Portanto, vale (b).

Reciprocamente, assumindo que vale (b), vamos mostrar que $ABCD$ é um paralelogramo. Como AB é congruente a CD, AD é congruente a CD e BD é um lado comum, os triângulos ABD e CDB são congruentes, pelo caso lado-lado-lado. Em particular, os ângulos $\angle ABD$ e $\angle BDC$ são congruentes, de onde podemos concluir que AB e CD são paralelos. Também são congruentes os ângulos alternos internos $\angle ADB$ e $\angle CBD$, de forma que BC e DA são paralelos. Portanto, os lados opostos de $ABCD$ são paralelos e esse quadrilátero é um paralelogramo.

Supondo agora que vale (a), vamos mostrar que vale (c). Como acabamos de mostrar que (a) e (b) são equivalentes, podemos usar o fato de que os lados opostos de um paralelogramo são congruentes. Isso, juntamente com a congruência dos pares de ângulos alternos internos $\angle BAC$ e $\angle ACD$, $\angle ABD$ e $\angle CDB$, nos permite concluir, pelo caso ângulo-lado-ângulo, que os triânglos ABM e CDM são congruentes. Logo, $\overline{AM} = \overline{MC}$ e $\overline{BM} = \overline{MD}$, ou seja, vale (c).

Finalmente, supondo que vale (c), temos $\overline{BM} = \overline{MD}$ e $\overline{AM} = \overline{MC}$. Como são opostos pelo vértice, os ângulos $\angle AMD$ e $\angle CMB$ são congruentes. Assim, os triângulos AMD e CMB são congruentes, pelo caso lado-ângulo-lado. Em particular, os ângulos alternos internos $\angle ADM$ e $\angle MBC$ são congruentes, logo BC e DA são paralelos. De modo análogo, podemos concluir que os triângulos ABM e CDM são congruentes, logo os ângulos alternos internos $\angle MAB$ e $\angle MCD$ são congruentes, ou seja, AB e CD são paralelos. Portanto vale (a). □

Agora, estamos em condições de apresentar uma caracterização geométrica de equipolência de segmentos orientados não colineares, isto é, segmentos que têm retas suporte distintas.

Teorema 2. *Sejam AB e CD dois segmentos orientados e não colineares. Então, AB e CD são equipolentes se, e somente se, AD e BC intersectam-se em seus pontos médios.*

Prova. Sejam AB e CD dois segmentos orientados não colineares e equipolentes. Como eles têm a mesma direção, suas retas suporte r e s são paralelas. Além disso, AB e CD têm um mesmo comprimento.

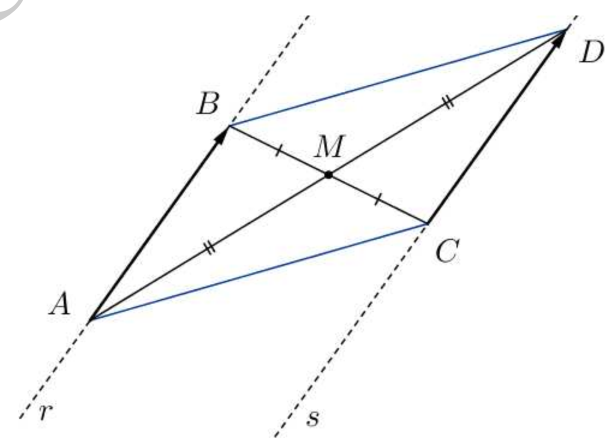

Figura 4: segmentos orientados equipolentes e não colineares são lados de um paralelogramo.

Como r e s são paralelas, os ângulos $\angle ABC$ e $\angle DCB$ são congruentes (veja a Figura 4). Como os lados AB e CD são congruentes, pois têm a mesma medida, e o lado BC é comum, os triângulos ABC e DCB são congruentes, pelo caso lado-ângulo-lado. Em particular, AC e BD

são congruentes, logo o quadrilátero $ABCD$ tem seus lados opostos congruentes e, pelo Teorema 1, é um paralelogramo. Novamente pelo Teorema 1, as diagonais AC e BD intersectam-se em seus pontos médios.

Reciprocamente, se AD e BC intersectam-se em seus pontos médios, pelo Teorema 1 $ABCD$ é um paralelogramo. Logo, $\overline{AB} = \overline{CD}$ e AB e CD têm a mesma direção, pois suas retas suporte r e s são paralelas. Resta provar que os segmentos orientados AB e CD têm o mesmo *sentido*.

A reta que passa pelos pontos B e C (veja novamente a Figura 4) divide o plano em dois semiplanos. Como B é a extremidade de AB, o segmento orientado AB "chega" em B, ou seja, "chega" na reta que passa por B e C, a "fronteira" que separa os dois semiplanos. Como C é a origem de CD, o segmento orientado CD "parte" de C, ou seja, se afasta dessa "fronteira". Se os dois segmentos orientados tivessem orientações contrárias, a extremidade D de CD teria que estar no mesmo semiplano que a origem A de AB. Porém, estamos assumindo que o segmento AD intersecta o segmento BC, logo cruza a "fronteira" que separa os dois semiplanos. Isso significa que os pontos A e D estão em semiplanos opostos, logo os segmentos orientados não podem ter sentidos opostos, isto é, têm o mesmo sentido. $\square$

2 A definição de vetor

Na seção anterior, vimos que a relação de equipolência é uma relação de equivalência, isto é, é reflexiva, simétrica e transitiva. Nesta seção, vamos explorar esse fato para construir a noção de vetor.

Seja AB um segmento orientado. O conjunto formado por todos os segmentos orientados equipolentes a AB é chamado **vetor** representado por AB. Denotamos o vetor representado por AB colocando uma seta sobre as letras que representam a origem e a extremidade do segmento orientado, apontando da origem para a extremidade: $\overrightarrow{AB}$. Dessa forma, temos

$$\overrightarrow{AB} = \{CD \mid CD \equiv AB\}.$$

Assim, um vetor é um *conjunto de segmentos orientados equipolentes*. Quando não for necessário enfatizar qual é o representante do vetor, poderemos denotá-lo escrevendo, simplesmente, $\overrightarrow{v}$.

Se dois segmentos orientados são equipolentes, então eles representam o mesmo vetor. De fato, suponha que $AB \equiv CD$. Como $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ são conjuntos de segmentos orientados, para mostrarmos que são iguais, devemos mostrar que cada um deles está contido no outro. Se $UV \in \overrightarrow{AB}$, então $UV \equiv AB$. Como $AB \equiv CD$, pela transitividade da relação de equipolência temos $UV \equiv CD$, logo $UV \in \overrightarrow{CD}$. De modo análogo, se $XY \in \overrightarrow{CD}$, então $XY \equiv CD$. Como $AB \equiv CD$, temos, pela simetria e pela transitividade da relação de equipolência, que $XY \equiv AB$, logo $XY \in \overrightarrow{AB}$.

Reciprocamente, se $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, então $AB \in \overrightarrow{CD}$, o que implica $AB \equiv CD$.

Resumindo:

$$AB \equiv CD \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}.$$

Dessa forma, podemos dizer que dois vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são **iguais** se são representados por segmentos orientados equipolentes.

Assim como fizemos para segmentos orientados, também podemos representar um vetor geometricamente como uma seta. A diferença entre segmentos orientados e vetores é que, enquanto um segmento orientado tem uma posição fixa, um vetor pode ser "movido". O que estamos fazendo aqui é formalizar a ideia de que um vetor pode ser *movido no plano (ou no espaço) desde que se mantenham seu comprimento, sua direção e seu sentido.* O que ocorre, em verdade, é que podemos escolher qualquer um dos segmentos orientados pertencentes a $\overrightarrow{v}$ como sendo um representante de $\overrightarrow{v}$. Ao escolhermos um representante específico do vetor, estamos fixando-o em uma posição; ao trocarmos um representante por outro, estamos mudando a posição do vetor, sem alterá-lo.

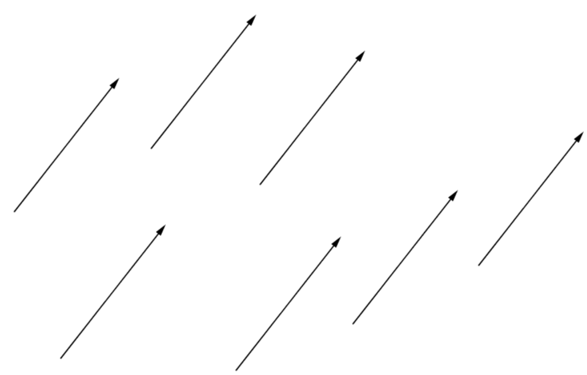

Figura 5: alguns segmentos orientados equipolentes que representam um vetor.

O teorema a seguir garante que podemos transportar um vetor para qualquer posição.

Teorema 3. *Dado um segmento orientado AB e um ponto C, existe um único segmento orientado equipolente a AB e com origem em C.*

Prova. Primeiro, suponha que o ponto C não pertence à reta determinada por A e B (veja a Figura 6, à esquerda). Neste caso, seja M o ponto médio do segmento BC. Pelo ponto M, trace a reta AM e sobre essa reta marque o ponto D tal que $\overline{AM} = \overline{MD}$. Então, $CD \equiv AB$. De fato, temos por construção que os segmentos AD e BC intersectam-se em seus pontos médios; portanto, pelo Teorema 2, os segmentos orientados AB e CD são equipolentes.

Suponha, agora, que C pertença à reta determinada por A e B. Neste caso (veja a Figura 6, à direita), considere um ponto P não pertencente a essa reta. Pela construção feita no primeiro caso, existe Q tal que $PQ \equiv AB$. Como P não pertence à reta que passa por A e B, a reta que passa por P e Q é paralela a essa reta, logo C não pertence à reta que passa por P e Q. Podemos, então fazer novamente a construção do primeiro caso para concluir que existe um ponto D tal que $CD \equiv AB$.

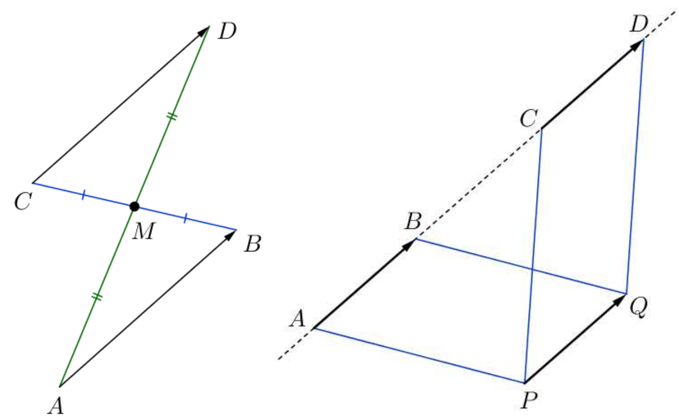

Figura 6: construção de segmento orientado equipolente a AB com origem em C.

Quando à unicidade, suponha que CD e CE sejam dois segmentos orientados com origem em C e equipolentes a um mesmo segmento orientado AB. Então $CD \equiv AB$ e $CE \equiv AB$, o que implica (por simetria e transitividade) $CD \equiv CE$. Em particular, as retas suporte de CD e CE têm a mesma direção e, de fato, são coincidentes porque têm o ponto C em comum. Como $\overline{CD} = \overline{CE}$ e CE tem o mesmo sentido que CD, os pontos D e E necessariamente coincidem. Logo, $CD = CE$. $\square$

A seguir, vamos definir as coordenadas de um vetor no plano, $\mathbb{R}^2$, ou no espaço, $\mathbb{R}^3$. Comecemos com vetores no plano.

Seja $\overrightarrow{v}$ um vetor representado pelo segmento orientado AB, onde A e B são pontos no plano cartesiano $\mathbb{R}^2$. Podemos representar esses pontos como pares ordenados de números reais: $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$.

As coordenadas do vetor $\overrightarrow{v}$ são os números que devem ser somados às coordenadas do ponto A para obtermos as coordenadas do ponto B. Isso dá a clara imagem de um vetor como um ente geométrico que representa um *deslocamento*. Chamando as coordenadas do vetor $\overrightarrow{v}$ de $(\Delta x, \Delta y)$, escrevemos

$$\overrightarrow{v} = (\Delta x, \Delta y).$$

De acordo com a definição dada acima, temos:

$$(x_A + \Delta x, y_A + \Delta y) = (x_B, y_B)$$

e, daí,

$$\Delta x = x_B - x_A \ \text{ e } \ \Delta y = y_B - y_A.$$

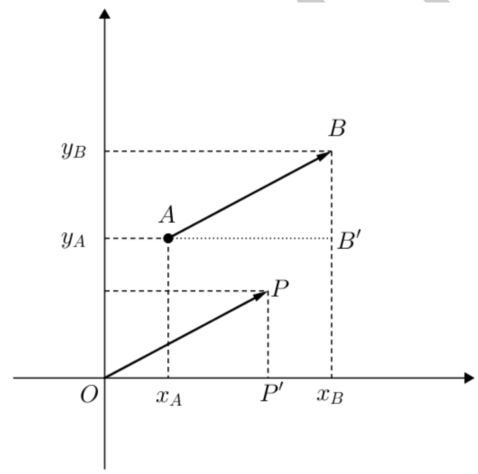

Figura 7: dois representantes de um vetor, um deles com origem em $O = (0,0)$.

Observe agora que, pelo Teorema 3, existe um segmento orientado OP equipolente a AB e com origem na origem O do sistema de coordenadas (veja a Figura 7). Note, ainda, que o segmento orientado OP também é um representante do vetor $\overrightarrow{v}$. Como as coordenadas de O são $(0,0)$, as coordenadas do vetor $\overrightarrow{v}$ coincidem com as coordenadas do ponto P.

De modo análogo, dado um vetor $\overrightarrow{v}$ no espaço, podemos considerar o representante OP, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OP}$, de modo que as coordenadas do vetor $\overrightarrow{v}$ são, por definição, as coordenadas da extremidade P desse segmento orientado (veja a Figura 8).

Assim, se as coordenadas de P são (x_P, y_P, z_P), então as coordenadas do vetor $\overrightarrow{v}$ são

$$(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = (x_P, y_P, z_P).$$

Como no caso de dimensão dois, se AB é um segmento orientado que representa o vetor $\overrightarrow{v}$, então

$$\Delta x = x_B - x_A, \ \ \Delta y = y_B - y_A \ \text{ e } \ \Delta z = z_B - z_A.$$

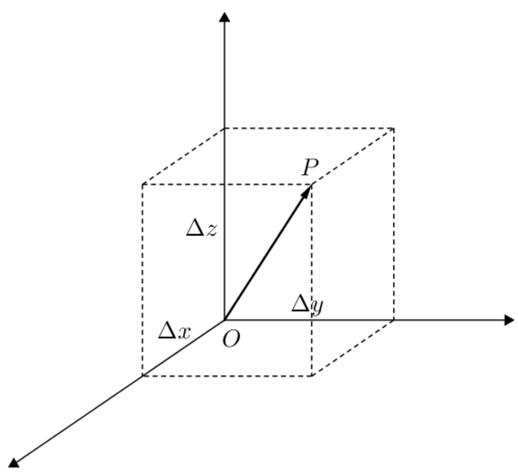

Figura 8: o representante de vetor no espaço, com origem em $O = (0, 0, 0)$, e suas coordenadas.

Dicas para o Professor

Três encontros de 50 minutos cada são suficientes para cobrir o material desta aula.

A presença do Teorema 1 e de sua demonstração atesta a importância que os paralelogramos têm no estudo de segmentos orientados e vetores. Além de fornecer um caracterização geométrica da relação de equipolência, o uso de paralelogramos vai ser importante na próxima aula, quando estudarmos as operações entre vetores.

No Teorema 2, a caracterização deve ser dada em função da intersecção das diagonais, embora isso pareça mais complicado do que simplesmente dizer que $ABCD$ é um paralelogramo. O que está em jogo aqui é a comparação entre os *sentidos* dos dois segmentos orientados. A caracterização em função da interseção das diagonais garante a manutenção do sentido. Observe que usamos a definição de semiplano para obtermos esse resultado. Por sua vez, essa definição faz uso de um axioma da Geometria Euclidiana conhecido como *Axioma de Pasch*. Se sua turma for mais avançada e os alunos já tiverem tido contato com os axiomas da Geometria, você pode citar essa relação. Para tanto, uma referência adequada é [1].

Ainda para o caso de sua turma ser mais avançada, você pode aproveitar a presença de uma relação de equivalência, a relação de equipolência, para falar um pouco mais sobre relações de equivalência em geral, citando outros exemplos, como a relação de congruência na Teoria dos Números.

Os resultados deste texto têm como objetivo dar um definição formal e precisa de vetor. No entanto, é importante que se tenha em mente as motivações geométricas e físicas para esta definição. Você deve deixar claro aos seus alunos que há um objeto geométrico abstrato (vetor) que deve ser definido em termos de noções puramente geométricas, e que tenha as propriedades que se espera que um vetor tenha.

Abordagens menos formais do que a apresentada aqui podem ser encontradas nas sugestões de leitura complementar [2] e [3].

Sugestões de Leitura Complementar

1. J. L. M. Barbosa. *Geometria Euclidiana Plana*. Coleção do Professor de Matemática, Editora S.B.M., Rio de Janeiro, 2012.
2. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar*, vol.2. Coleção do Professor de Matemática, Editora S.B.M., Rio de Janeiro, 2012.
3. E. L. Lima et al. *A Matemática do Ensino Médio*, vol.3. Coleção do Professor de Matemática, Editora S.B.M., Rio de Janeiro, 1998.