Material Teórico - Módulo de Função Exponencial

Inequações Exponenciais

Primeiro Ano - Médio

Autor: Prof. Angelo Papa Neto
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

Portal OBMEP

1 Generalidades sobre inequações

Recordemos a relação de ordem usual em $\mathbb{R}$: para $a, b \in \mathbb{R}$, tem-se $a \leq b$ se, e somente se $b - a$ é positivo ou zero. Observe que, para $x \in \mathbb{R}$, com $x \neq 0$, temos que x é positivo ou $-x$ é positivo. Assim, se $a, b \in \mathbb{R}$ são distintos e $x = b - a$, então x positivo implica que $a \leq b$ e $-x = a - b$ positivo implica $b \leq a$.

A relação de ordem entre números reais tem as seguintes propriedades:

(I) Se $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \leq b$, então $a + c \leq b + c$.

(II) Se $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \leq b$ e $0 \leq c$, então $ac \leq bc$.

(III) Se $a \in \mathbb{R}$, então $0 \leq a^2$.

Notação: se $a \leq b$ e $a \neq b$, escrevemos $a < b$. Também escrevemos $b \geq a$ para indicar $a \leq b$ e $b > a$ para indicar $a < b$.

Seja D um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ e sejam $f : D \to \mathbb{R}$ e $g : D \to \mathbb{R}$ funções com o mesmo domínio D. Suponhamos que deseja-se encontrar todos os elementos $x \in D$ tais que

$$f(x) \leq g(x). \tag{1}$$

Neste caso, dizemos que (1) é uma **inequação**. O conjunto

$$S = \{x \in D \mid f(x) \leq g(x)\}$$

é chamado **conjunto solução** da inequação (1).

Escrevendo $h(x) = g(x) - f(x)$, vemos facilmente que a inequação (1) é equivalente à inequação

$$h(x) \geq 0. \tag{2}$$

Logo, toda inequação pode ser escrita na forma (2). Neste caso, o conjunto solução pode ser escrito como

$$S = \{x \in D \mid h(x) \geq 0\}.$$

Exemplo 1. *Encontre o conjunto solução da inequação*

$$\frac{\sqrt{x^3 - x}}{x - 1} \leq 0.$$

Solução. Neste exemplo, a função h é dada por

$$h(x) = \frac{\sqrt{x^3 - x}}{x - 1}.$$

O primeiro passo é identificar o *domínio* de h. Para que $h(x)$ seja um número real, o denominador da fração não pode ser zero, logo, $x \neq 1$. Também, a expressão sob a raiz quadrada deve ser não negativa, logo, $x^3 - x \geq 0$, ou seja, $x(x-1)(x+1) \geq 0$; não é difícil verificar que intervalos onde a expressão $x(x-1)(x+1)$ é positiva ou zero são $[-1, 0]$ e $[1, +\infty)$. Como $x \neq 1$, o domínio de h é a união $[-1, 0] \cup (1, +\infty)$.

Por fim, para que a expressão $\frac{\sqrt{x^3-x}}{x-1}$ seja negativa ou zero, devemos ter $x - 1 < 0$, pois o numerador é sempre positivo. Assim, o conjunto solução da inequação dada é a interseção de $[-1, 0] \cup (1, +\infty)$ com $(-\infty, 1)$, logo, o conjunto solução é $S = [-1, 0]$. □

Em alguns casos, inequações surgem em problemas que envolvem a existência de soluções de certas *equações*.

Exemplo 2. *Estabeleça uma condição necessária para que a equação $2^x + x^2 = 7x - 12$ tenha solução real.*

Solução. A equação dada é equivalente a

$$2^x = -x^2 + 7x - 12.$$

Foi mostrado na aula *Função exponencial e propriedades* que $2^x > 0$ para todo x real. Assim, *se a equação tiver alguma solução real x*, essa solução deve ser tal que a expressão $-x^2 + 7x - 12$ é positiva. Logo, temos de começar resolvendo a inequação $-x^2 + 7x - 12 > 0$.

Como o coeficiente do termo quadrático é negativo, o gráfico da função dada por $f(x) = -x^2 + 7x - 12$ é uma parábola com a concavidade voltada para baixo. Logo, $f(x)$ é positivo se x está situado entre as raízes de f, ou seja, se $3 < x < 4$. Assim, uma condição *necessária* para que a equação dada tenha solução é que x pertença ao intervalo aberto $(3, 4)$.

Embora seja uma condição necessária, o fato de x pertencer ao intervalo aberto $(3, 4)$ não garante que uma solução da equação dada efetivamente exista. De outra forma, a condição $3 < x < 4$ não é *suficiente* para que a equação tenha solução. Isso pode ser verificado notando-se que o valor mínimo da função (crescente) $g(x) = 2^x$, no intevalo $[3, 4]$ é $g(3) = 8$, enquanto o valor máximo de $f(x) = -x^2 + 7x - 12$ é $1/4$. Assim, os gráficos de f e g (mostrados, na Figura 1, respectivamente em vermelho e verde) não têm pontos em comum, o que é equivalente a dizer que a equação dada não tem soluções reais.

□

2 Inequações exponenciais

Se uma função h é exponencial, dizemos que a inequação (2) é uma **inequação exponencial**.

Algumas inequações exponenciais podem ser transformadas em inequações envolvendo apenas os expoentes.

De modo mais preciso, se $a > 1$, então a inequação

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \tag{3}$$

equivale à inequação $f(x) > g(x)$; isto porque, quando $a > 1$, a função $u \mapsto a^u$ é crescente, de sorte que a única maneira de termos $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ é termos $f(x) > g(x)$.

Portal da OBMEP

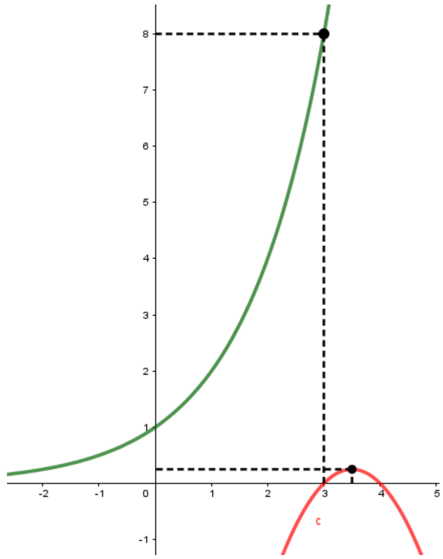

Figura 1: os gráficos de f e g não se encontram.

No caso em que $0 < a < 1$, a inequação (3) equivale a $f(x) < g(x)$, ou seja, a desigualdade entre os expoentes é "invertida" em relação à desigualdade entre as potências. Aqui, o que ocorre é que, quando $0 < a < 1$, a função $u \mapsto a^u$ é decrescente, de sorte que a única maneira de termos $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ é termos $f(x) < g(x)$.

Evidentemente, se a desigualdade $>$ for substituída por $\geq$, $<$ ou $\leq$, o procedimento é similar, permanecendo a mesma desigualdade entre os expoentes, se $a > 1$, e aparecendo a desigualdade invertida entre os expoentes, se $0 < a < 1$.

A seguir, vamos discutir alguns exemplos para ilustrar essas ideias.

Exemplo 3. *Encontre o conjunto solução da inequação*

$$3^{4x-1} < 1.$$

Solução. A inequação dada pode ser reescrita como $3^{4x-1} < 3^0$. Como $3 > 1$, nossa discussão anterior garante que a inequação $3^{4x-1} < 3^0$ equivale a $4x - 1 > 0$ e, consequentemente, a $x > 1/4$. Portanto, o conjunto solução da inequação dada é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1/4\}$. $\square$

Exemplo 4. *Encontre o conjunto solução da inequação*

$$(0,01)^{x+1} \geq (0,0001)^{x-1}.$$

Solução. Note que $0,0001 = (0,01)^2$. Assim, a inequação dada pode ser reescrita como $(0,01)^{x+1} \geq \left((0,01)^2\right)^{x-1}$ ou, ainda, como

$$(0,01)^{x+1} \geq (0,01)^{2x-2}.$$

Uma vez que a base $a = 0,01$ é um número real situado entre 0 e 1, a última inequação acima é equivalente à inequação

$$x + 1 \leq 2x - 2,$$

que, por sua vez, é equivalente a $3 \leq x$. Portanto, o conjunto solução da inequação dada é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$. $\square$

Exemplo 5. *Resolva a inequação*

$$4^{x+2} \cdot 125^{x-2} \leq 5^{x+2} \cdot 64^{x-2}.$$

Solução. Neste caso, aparecem na inequação dada potências com bases diferentes. Assim, nossa estratégia inicial será simplificar a expressão dada para obter uma inequação envolvendo potências de mesma base. Para tanto, começamos dividindo ambos os membros da inequação por $125^{x-2} \cdot 5^{x+2}$ (que é um número positivo) para obter

$$\frac{4^{x+2}}{5^{x+2}} \leq \frac{64^{x-2}}{125^{x-2}}.$$

Como os expoentes dos numeradores e denominadores das duas frações são os mesmos, podemos escrever a última inequação acima como

$$\left(\frac{4}{5}\right)^{x+2} \leq \left(\frac{64}{125}\right)^{x-2}.$$

Uma vez que $\frac{64}{125} = \left(\frac{4}{5}\right)^3$, podemos, enfim, escrever a inequação de forma a envolver apenas potências de mesma base:

$$\left(\frac{4}{5}\right)^{x+2} \leq \left(\left(\frac{4}{5}\right)^3\right)^{x-2},$$

que é equivalente a

$$\left(\frac{4}{5}\right)^{x+2} \leq \left(\frac{4}{5}\right)^{3(x-2)}.$$

Como $0 < 4/5 < 1$, a desigualdade acima é equivalente a

$$x + 2 \geq 3(x-2),$$

ou seja,

$$x + 2 \geq 3x - 6.$$

Resolvendo essa última inequação, encontramos $x \leq 4$, de forma que o conjunto solução da inequação dada é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 4\}$. $\square$

Em alguns casos, a inequação pode ser resolvida usando-se uma *mudança de variável* e uma inequação auxiliar, como no exemplo a seguir.

Exemplo 6. *Resolva a seguinte inequação:*

$$25^x - 6 \cdot 5^x + 5 < 0.$$

Solução. Observando que $25^x = (5^2)^x = 5^{2x} = (5^x)^2$, percebemos que a mudança de variável $y = 5^x$ fornece $25^x = y^2$ e, portanto, transforma a inequação dada em

$$y^2 - 6y + 5 < 0.$$

Portal da OBMEP

O estudo de funções quadráticas garante que a expressão y^2-6y+5 se anula para $y=1$ ou $y=5$, e é negativa entre essas duas raízes. Então, para que y^2-6y+5 seja negativo, devemos ter $1<y<5$, ou seja, $1<5^x<5$. Por sua vez, essas últimas inequações são equivalentes a $5^0<5^x<5^1$ e, como $5>1$, a $0<x<1$. Portanto, o conjunto solução da inequação dada é $S=\{x\in\mathbb{R}\mid 0<x<1\}$. □

Em alguns casos, a mudança de variável na inequação é um pouco mais sofisticada. Por vezes, é necessário que se faça mais do que uma mudança de variável na inequação.

Exemplo 7. *Resolva a inequação*

$$2^{2x+1}+2^{-2x+1}>9(2^x+2^{-x})-14.$$

Solução. Denotando $y=2^x+2^{-x}$, temos que

$$\begin{aligned} y^2 &= (2^x+2^{-x})^2 \\ &= 2^{2x}+2\cdot 2^x\cdot 2^{-x}+2^{-2x} \\ &= 2^{2x}+2^{-2x}+2. \end{aligned}$$

Logo,

$$2^{2x+1}+2^{-2x+1}=2(2^{2x}+2^{-2x})=2(y^2-2).$$

Voltando à inequação dada, percebemos agora que ela pode ser reescrita, na variável y, como

$$2(y^2-2)>9y-14,$$

ou seja,

$$2y^2-9y+10>0.$$

Uma vez que as raízes de $2y^2-9y+10$ são 2 e $5/2$, sabemos que a expressão $2y^2-9y+5$ é positiva se $y<2$ ou $y>5/2$. Analisemos essas duas possibilidades:

i. Se $y<2$, então $2^x+2^{-x}<2$ ou seja, $2^x+\frac{1}{2^x}-2<0$; esta última inequação é equivalente a $2^{2x}+1-2\cdot 2^x<0$. Fazendo a substituição $z=2^x$, obtemos a inequação $z^2-2z+1<0$, que é equivalente a $(z-1)^2<0$. Mas isso não pode ocorrer, porque $(z-1)^2\geq 0$ para todo z real. Portanto, neste caso, não há solução real.

ii. Se $y>5/2$, então $2^x+2^{-x}>5/2$. Fazendo novamente $z=2^x>0$, obtemos $z+\frac{1}{z}>\frac{5}{2}$ ou, ainda, $2z^2-5z+2>0$. As raízes de $2z^2-5z+2$ são 2 e $1/2$; portanto, para que $2z^2-5z+2$ seja positivo, devemos ter $z<1/2$ ou $z>2$, isto é, $2^x<2^{-1}$ ou $2^x>2^1$. Portanto, $x<-1$ ou $x>1$. □

Até aqui, todas as inequações apresentadas puderam ser reduzidas à comparação entre potências de mesma base. No exemplo a seguir, examinamos uma inequação tal que as potências envolvidas não têm uma mesma base. Veremos que também é possível resolver esse tipo de inequação lançando mão de um artifício novo, que exploraremos de maneira mais sistemática em aulas posteriores, quando estudarmos *logaritmos*.

Exemplo 8. *Resolva a inequação*

$$2^{x^2+1}>3^x.$$

Solução. Como os dois membros da inequação não têm a mesma base, não podemos usar as técnicas anteriores. Entretanto, como a imagem da função $f(x)=2^x$ é o conjunto dos reais positivos, existe um número real k tal que $2^k=3$. Além disso, como $2<3<2^2$, podemos escrever $2^1<2^k<2^2$, o que garante que $1<k<2$.

Substituindo 3 por 2^k na inequação dada, obtemos a inequação equivalente

$$2^{x^2+1}>\left(2^k\right)^x,$$

a qual é sucessivamente equivalente a $2^{x^2+1}>2^{kx}$ e $x^2+1>kx$. Assim, a fim de resolver a inequação dada, temos de resolver a inequação equivalente

$$x^2-kx+1>0,$$

onde $1<k<2$ é tal que $2^k=3$.

Como $k<2$, o discriminante a função quadrática x^2-kx+1 é

$$\Delta=k^2-4<0.$$

Também, uma vez que o coeficiente de x^2 é positivo, a negatividade do discriminante significa que $x^2-kx+1>0$, para todo $x\in\mathbb{R}$. Portanto, o conjunto solução da inequação dada é $S=\mathbb{R}$, isto é, a inequação é válida para todo x real. □

O Exemplo 8 é uma inequação exponencial do tipo

$$A^{f(x)}>B^{g(x)}, \tag{4}$$

onde A e B são números reais positivos distintos, diferentes de 1, e f e g são funções reais de variável real. A desigualdade "$>$" pode ser substituída, em (4), por "$<$", "$\leq$" ou "$\geq$".

Em geral, para resolvermos uma inequação exponencial como (4) com as ferramentas de que dispomos no momento, devemos repetir o procedimento adotado no Exemplo 8: como a imagem da função $y=A^x$ é o conjunto dos reais positivos, existe um número real k tal que $A^k=B$. Logo,

$$A^{f(x)}>B^{g(x)}\Leftrightarrow A^{f(x)}>\left(A^k\right)^{g(x)}\Leftrightarrow A^{f(x)}>A^{kg(x)}.$$

Se $A>1$, esta última inequação equivale a $f(x)>kg(x)$; se, por outro lado, $0<A<1$, a desigualdade entre os expoentes é invertida, de sorte que a inequação equivalente é $f(x)<kg(x)$.

O próximo exemplo colocar novamente em ação a discussão geral acima.

Exemplo 9. *Encontre o menor valor inteiro de x para o qual*

$$3^{x+1}\leq 5^{x-1}.$$

Portal da OBMEP

Solução. Assim como no Exemplo 8, podemos escrever $3^k = 5$, onde k é um número real; além disso, como $3 < 5 < 9$, temos $3^1 < 3^k < 3^2$, logo, $1 < k < 2$.

A inequação dada pode ser reescrita como

$$3^{x+1} \leq \left(3^k\right)^{x-1}$$

ou, ainda, como $3^{x+1} \leq 3^{k(x-1)}$. Uma vez que $3 > 1$, essa última inequação é equivalente a $x+1 \leq k(x-1)$, ou seja, $(k-1)x \geq k+1$. Mas, como $k > 1$, a divisão de ambos os membros por $k-1$ não altera a desigualdade, de sorte que $x \in \mathbb{R}$ resolve a inequação original se, e somente se,

$$x \geq \frac{k+1}{k-1}.$$

Voltando ao enunciado, queremos encontrar o menor inteiro x que é maior ou igual a $\frac{k+1}{k-1}$. A desigualdade $k < 2$ nos diz que x deve ser pelo menos 4. Realmente,

$$x \geq \frac{k+1}{k-1} = \frac{k-1+2}{k-1} = 1 + \frac{2}{k-1} > 3$$

e, como queremos x inteiro, devemos ter $x \geq 4$.

Uma estimativa melhor para x depende de termos uma estimativa igualmente melhor para k. Uma tal estimativa pode ser obtida notando que as desigualdades $81 < 125$ e $25 < 27$ podem ser escritas como $3^4 < 3^{3k}$ e $3^{2k} < 3^3$, de forma que $\frac{4}{3} < k < \frac{3}{2}$. Portanto, $\frac{1}{3} < k-1 < \frac{1}{2}$, logo,

$$6 > \frac{2}{k-1} > 4.$$

Então,

$$x = 1 + \frac{2}{k-1} \in (5,7),$$

e concluímos que $x = 5$ ou $x = 6$.

Testando esses valores, vemos que $x = 5$ já satisfaz a inequação do enunciado:

$$3^6 = 729 \leq 3125 = 5^5.$$

□

Conforme comentamos anteriormente, no módulo seguinte, sobre logaritmos, veremos que é possível calcular o valor de k e, com isso, obter soluções mais precisas de inequações como as dos exemplos 8 e 9.

Dicas para o Professor

A presente aula pode ser coberta em três encontros de 50 minutos: um primeiro encontro para tratar de generalidades sobre inequações, um segundo para lidar com inequações exponenciais envolvendo potências de mesmas bases e um terceiro para abordar o caso de bases distintas.

O Exemplo 2 pode ser utilizado para ilustrar a diferença entre condições *necessária* e condição *suficiente*, a qual é objeto de confusão frequente entre os alunos.

Os exemplos 8 e 9 tratam de inequações exponenciais que envolvem potências com bases distintas. O número real k que aparece no método usado na solução dos dois exemplos é um logaritmo, mas não precisamos da teoria dos logaritmos para resolver esses problemas. Isso porque, nesses problemas especificamente, não há necessidade de sabermos o valor exato de k, mas apenas de *estimarmos* esse valor.

As referências colecionadas abaixo discutem funções exponenciais e logaritmos em variados graus de dificuldade e abrangência. A referência [3] traz uma exposição bastante detalhada e elementar, com dezenas de exemplos resolvidos e exercícios propostos. As referências [1] e [2] apresentam exponenciais e logaritmos de maneira integrada ao Cálculo, com vários problemas não padrão, algumas aplicações relevantes à Física e material mais profundo. Por fim, a referência [4], por sua elegância e simplicidade, é leitura obrigatória.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matematica Elementar*, vol. 3, segunda edição. Coleção do Professor de Matemática, SBM, Rio de Janeiro, 2013.
2. A. Caminha. *Fundamentos de Cálculo*. Coleção PROFMAT, SBM, Rio de Janeiro, 2014.
3. G. Iezzi, O. Dolce e C. Murakami. *Fundamentos de Matemática Elementar*, vol. 2, quarta edição. Ed. Atual, São Paulo, 1985.
4. E. L. Lima. *Logaritmos*. SBM, Rio de Janeiro, 1991.

Portal da OBMEP