Material Teórico - Módulo de Introdução ao Cálculo – Limites – Parte 1

Limites de funções

Tópicos Adicionais

Autor: Prof. Angelo Papa Neto
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

19 de setembro de 2020

1 Pontos de acumulação

Seja $I \subset \mathbb{R}$ um conjunto não vazio. Para que possamos definir o limite de uma função $f : I \to \mathbb{R}$ quando sua variável independente x tende a um número real a, é preciso que seja possível considerar elementos do conjunto I distintos de a mas arbitrariamente próximos de a, ou seja, o ponto a não pode estar "isolado" do conjunto I. Contudo, isso não significa que a precise pertencer ao conjunto I. Vejamos um exemplo.

Exemplo 1. *Seja* $I = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z}, n \geq 2\right\} \cup (1,2) \cup \{3\}$. *O número* $a_1 = 0$ *não pertence a* I*, mas existem elementos de* I *arbitrariamente próximos de* 0. *Qualquer número pertencente ao intervalo* $(1,2)$ *é um elemento de* I *tal que existem outros elementos de* I *arbitrariamente próximos. Finalmente, o número* 3 *é um elemento de* I*, mas não existem elementos de* I *a uma distância menor do que* 1 *de* 3.

Dizemos que um número real a é **ponto de acumulação** de um conjunto $C \subset \mathbb{R}$ se, para cada *erro* $\varepsilon > 0$, existe $x \in C$, $x \neq a$, tal que $|x - a| < \varepsilon$, isto é, o número x é diferente de a e pertence ao intervalo aberto $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

No Exemplo 1, o número 0, embora não pertença a I, é ponto de acumulação de I. Realmente, para cada erro $\varepsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ (suficientemente grande) tal que $\frac{1}{n} < \varepsilon$, logo, $|1/n - 0| = 1/n < \varepsilon$. Por outro lado, $3 \in I$, mas este número não é ponto de acumulação de I, pois não existem elementos de I, diferentes de 3 e pertencentes (por exemplo) ao intervalo aberto $\left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$.

Exemplo 2. *Se* $I = (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$ *é um intervalo aberto, então todos os elementos de* I *são pontos de acumulação de* I. *Para verificarmos este fato, fixemos* $a \in I$*, ou seja,* $a \in \mathbb{R}$ *tal que* $\alpha < a < \beta$. *Se* $d = \min\{a - \alpha, \beta - a\}$*, então o intervalo* $(a - d, a + d)$ *está contido em* I. *Consideremos dois casos separadamente:*

- *Se* $\varepsilon \geq d$*, então* $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap I \supset (a - d, a + d) \cap I$*, logo, contém elementos de* I *diferentes de* a.

- *Se $0 < \varepsilon < d$, então $(a-\varepsilon,a+\varepsilon) \subset (a-d,a+d) \subset I$, logo, todos os pontos do intervalo $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ pertencem a I.*

Se $a \in I$ e existe $\varepsilon > 0$ tal que $(a-\varepsilon,a+\varepsilon) \cap I = \{a\}$, dizemos que a é um **ponto isolado** de I. Em outras palavras, um elemento a de um conjunto $I \subset \mathbb{R}$ é dito isolado, se não existem outros elementos de I próximos de a. No Exemplo 1, o número 3 é um ponto isolado de I.

Um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ é chamado **discreto** se todos os seus pontos são isolados. No Exemplo 1, o conjunto I não é discreto, pois os elementos de $(1,2) \subset I$ não são isolados.

Exemplo 3. *Todo conjunto finito $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ de números reais é discreto. De fato, se d é a menor distância entre dois elementos distintos do conjunto A, então $A \cap (a_i - d, a_i + d) = \{a_i\}$, para cada i.*

Exemplo 4. *O conjunto $\mathbb{Z}$, dos números inteiros é infinito e discreto. De fato, para um inteiro qualquer n, temos que $\mathbb{Z} \cap (n-1,n+1) = \{n\}$. Outro exemplo de conjunto discreto infinito é o conjunto $\left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z}, n \geq 1\right\}$. Isto porque, para cada $n > 1$, os inversos de inteiros positivos mais próximos de $\frac{1}{n}$ são $\frac{1}{n-1}$ e $\frac{1}{n+1}$. Assim, o intervalo centrado em $\frac{1}{n}$ e cujo raio é a menor das distâncias $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ e $\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$ (no caso, $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$) contém apenas um elemento do conjunto: $\frac{1}{n}$. O conjunto $\left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z}, n \geq 1\right\} \cup \{0\}$ não é discreto, pois 0 é ponto de acumulação desse conjunto e, por isso, não pode ser isolado.*

Para evitar a discussão precoce sobre noção de ponto de acumulação, os livros de Cálculo, em geral, consideram apenas funções definidas em intervalos. Esta restrição é conveniente, uma vez que todos os elementos de um intervalo I são pontos de acumulação de I, o que torna possível o cálculo de limites de funções $f : I \to \mathbb{R}$ quando $x \in I$ tende a $a \in I$.

Entretanto, se o intervalo for aberto, $I = (a,b)$, há a possibilidade de se calcular limites de f quando $x \in I$ tende a um dos extremos do intervalo, a ou b, mesmo que estes não pertençam ao intervalo, pois ainda são pontos de acumulação de I. São os chamados *limites laterais*, que discutiremos em uma aula posterior.

Na próxima seção, consideraremos uma situação ligeiramente mais geral.

2 Limites de funções

Consideremos um conjunto $I \subset \mathbb{R}$ que é uma união finita de intervalos, e um número real a que é ponto de acumulação de I. Seja, ainda, $f : I \to \mathbb{R}$ uma função dada. Se $\ell \in \mathbb{R}$, dizemos que *o limite de $f(x)$ quando x tende a a é igual a ℓ*, e escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \tag{1}$$

para indicar que a seguinte situação ocorre: Suponha que seja imposta uma *exigência de proximidade* entre $f(x)$ e ℓ, ou seja, suponha dado um número real $\varepsilon > 0$ e se exija que $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. Então, existe uma *distância máxima segura* entre x e a para que a exigência seja cumprida, isto é, existe $\delta > 0$ tal que, se $x \in I$ cumpre a condição $0 < |x - a| < \delta$, temos a garantia de que $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.

Em geral, escrevemos a condição acima da seguinte maneira mais sucinta: Dada uma exigência $\varepsilon > 0$, existe uma garantia $\delta > 0$ tal que, se $x \in I$ satisfaz $0 < |x - a| < \delta$, então $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.

Esta é a forma pela qual a definição de limite geralmente aparece nos livros de Cálculo (exceto pelas palavras “exigência” e “garantia”). De todo modo, o mais importante, na definição de limite, é encarar o número real $\varepsilon > 0$ como uma exigência de proximidade entre $f(x)$ e ℓ, e o número real $\delta > 0$ como uma garantia de *proximidade máxima* entre x e a, que, uma vez assegurada, implique o cumprimento da exigência representada por ε. Por isso, os verbos *exigir* e *garantir* estão sublinhados nas afirmações.

As condições (i) $x \in I$, $0 < |x - a| < \delta$ e (ii) $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ podem ser interpretadas em termos de intervalos abertos. Para (i), $|x - a| < \delta$ é equivalente a $-\delta < x - a < \delta$. Somando

a, obtemos $a-\delta<x<a+\delta$. Assim, para a e δ fixados, a condição (i) equivale a

$$x\in(a-\delta,a+\delta)\cap\big(I\setminus\{a\}\big).$$

Da mesma forma, a condição (ii) é equivalente a $-\varepsilon<f(x)-\ell<\varepsilon$, logo, a

$$f(x)\in(\ell-\varepsilon,\ell+\varepsilon).$$

Portanto, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell$ equivale a que, dado $\varepsilon>0$, exista $\delta>0$ tal que

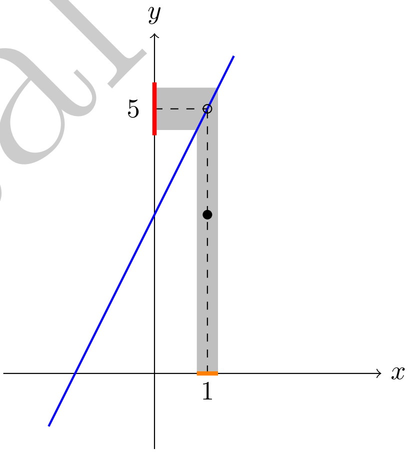
$$x\in(a-\delta,a+\delta)\cap\big(I\setminus\{a\}\big)\Rightarrow f(x)\in(\ell-\varepsilon,\ell+\varepsilon).$$

Exemplo 5. *Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dada por*

$$f(x)=\begin{cases}2x+3, & se\ x\neq 1\\ 3, & se\ x=1\end{cases}.$$

Prove que $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=5$.

Solução. Primeiramente, vale a pena comentar que $\mathbb{R}$ pode ser visto como um intervalo aberto: $\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$. Dessa forma, este exemplo se encaixa na situação geral que estamos estudando. A seguir, esboçamos o gráfico de f.



Dada uma exigência $\varepsilon > 0$, ou seja, um intervalo centrado em 5 da forma $(5-\varepsilon{,}5+\varepsilon)$, queremos encontrar um intervalo $(1-\delta{,}1+\delta)$, com $\delta > 0$ escolhido adequadamente, de modo que, sempre que $x \in (1-\delta{,}1+\delta) \setminus \{1\}$, então $f(x) \in (5-\varepsilon{,}5+\varepsilon)$.

Antes de abordarmos o caso geral, na figura acima tomamos $\varepsilon = 0{,}5 = \frac{1}{2}$. Esta escolha de ε determina o intervalo $\left(5-\frac{1}{2}{,}5+\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{9}{2},\frac{11}{2}\right)$, contido no eixo-$y$ e centrado em 5; ele está pintado de vermelho na figura. No eixo-x, pintado de laranja, está o intervalo $(1-\delta{,}1+\delta)$, com $\delta = 0{,}2 = \frac{1}{5}$. Tal valor de δ funciona, tendo em vista que

$$\begin{aligned} x \in \left(1-\frac{1}{5}{,}1+\frac{1}{5}\right) &\Rightarrow x \in \left(\frac{4}{5},\frac{6}{5}\right) \\ &\Rightarrow \frac{8}{5} < 2x < \frac{12}{5} \\ &\Rightarrow \frac{8}{5}+3 < 2x+3 < \frac{12}{5}+3 \\ &\Rightarrow \frac{23}{5} < 2x+3 < \frac{27}{5}; \end{aligned}$$

então, voltando ao intervalo $(5-\varepsilon{,}5+\varepsilon) = \left(\frac{9}{2},\frac{11}{2}\right)$ e observando que $\frac{9}{2} < \frac{23}{5}$ e $\frac{27}{5} < \frac{11}{2}$, concluímos, a partir dos cálculos acima, que

$$\begin{aligned} x \in \left(1-\frac{1}{5}{,}1+\frac{1}{5}\right) \setminus \{1\} &\Rightarrow \frac{9}{2} < 2x+3 < \frac{11}{2} \\ &\Rightarrow f(x) \in \left(\frac{9}{2},\frac{11}{2}\right). \end{aligned}$$

Observe que, na última implicação acima, só pudemos escrever $f(x)$ no lugar de $2x+3$ porque tomamos $x \neq 1$. Aliás, este fenômeno está no cerne da definição de limite: não interessa o valor de $f(1)$ (em nosso caso, 3); o que importa são os valores $f(x)$ para x próximo a 1 mas *diferente* de 1.

Conforme mencionamos, o argumento que fizemos até aqui, ilustrado pela figura anterior, vale apenas para a escolha $\varepsilon = 0{,}5$; neste caso, conseguimos encontrar a garantia $\delta = 0{,}2$. Vejamos, agora, como encontrar um $\delta > 0$ para qualquer $\varepsilon > 0$ dado.

Dada uma exigência $\varepsilon > 0$ qualquer (de proximidade entre $f(x)$ e ℓ, via de regra, a maneira mais eficiente de encontrar uma garantia $\delta > 0$ (de proximidade entre x e a) é partir da desigualdade que se quer obter, $|f(x) - \ell| < \varepsilon$, e, supondo $x \neq a$ e utilizando um pouco de álgebra elementar, chegar a uma *desigualdade equivalente* $0 < |x - a| < \delta$.

No presente caso, podemos fazer isto da seguinte forma: Começamos observando que, para $x \neq 1$, tem-se $f(x) = 2x+3$. Então, *tomando* $x \neq 1$, temos

$$\begin{aligned}|f(x) - 5| < \varepsilon &\Leftrightarrow |(2x+3) - 5| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow |2x - 2| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow 2|x-1| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow |x - 1| < \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Em particular, vemos que

$$0 < |x - 1| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |f(x) - 5| < \varepsilon,$$

de sorte que podemos tomar $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$.

Evidentemente, qualquer $\delta > 0$ que seja menor do que $\frac{\varepsilon}{2}$ também resolve o problema. No exemplo numérico com o qual iniciamos a discussão do exemplo, $\delta = 0{,}2 < 0{,}25 = \frac{0{,}5}{2} = \frac{\varepsilon}{2}$. $\square$

O próximo exemplo examina o limite de uma função definida numa união de dois intervalos. Ademais, o limite é calculado num ponto que não pertence ao domínio da função.

Exemplo 6. *Considere a função* $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$*, dada por*

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - x - 2}.$$

Calcule $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$*.*

Solução. Inicialmente, observe que não podemos substituirmos x por 2 em $\frac{x^2-3x+2}{x^2-x-2}$, tanto porque 2 não pertence ao domínio da função quanto porque, se pertencesse, o valor de $f(2)$ não poderia ser dado calculando $\frac{x^2-3x+2}{x^2-x-2}$ em $x=2$ (tendo em vista o anulamento do denominador dessa fração em $x=2$).

Por outro lado, lembremos que $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ se preocupa com os valores de $f(x)$ à medida que x se aproxima de 2, mantendo-se *diferente* de 2. Dito isto, sendo $x \neq 2$, e fatorando os polinômios do numerador e denominador da expressão que define $f(x)$, obtemos

$$f(x) = \frac{\cancel{(x-2)}(x-1)}{\cancel{(x-2)}(x+1)} = \frac{x-1}{x+1}.$$

Assim, $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ para $x \neq 2$; também, substituindo $x=2$ em $\frac{x-1}{x+1}$, obtemos $\frac{1}{3}$, e nossa intuição diz que $\frac{1}{3}$ é o candidato ao limite que estamos procurando.

Mostremos que, de fato, $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \dfrac{1}{3}$, isto é, que

$$\lim_{x\to 2} \frac{x-1}{x+1} = \frac{1}{3}.$$

Para tanto, repitamos o argumento apresentado na parte final da discussão do Exemplo 5, começando com $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ tal que $\left|\frac{x-1}{x+1} - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon$ e usando álgebra elementar para, a partir dessa desigualdade, obter uma desigualdade do tipo $|x-2| < \delta$.

Inicialmente, podemos simplificar o primeiro membro da desigualdade:

$$\left|\frac{x-1}{x+1} - \frac{1}{3}\right| = \left|\frac{3x-3-x-1}{3(x+1)}\right| = \left|\frac{2(x-2)}{3(x+1)}\right|. \qquad (2)$$

Agora, como x deve estar próximo de 2, podemos supor que $1 < x < 3$. (Isto equivale a tomar, de partida, $0 < \delta \leq 1$; realmente, $|x-2| < 1 \Rightarrow 1 < x < 3$.) Assim,

$$x > 1 \Rightarrow 3x > 3 \Rightarrow 3x+3 > 6 \Rightarrow \frac{1}{|3(x+1)|} < \frac{1}{6}.$$

Então, com a garantia inicial $|x-2|<1$, podemos voltar a (2) e estimar

$$\left|\frac{x-1}{x+1}-\frac{1}{3}\right| = \left|\frac{2(x-2)}{3(x+1)}\right| < \frac{2|x-2|}{6} = \frac{|x-2|}{3}.$$

Portanto, dado $\varepsilon > 0$, teremos que

$$\frac{|x-2|}{3} < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{x-1}{x+1}-\frac{1}{3}\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|f(x)-\frac{1}{3}\right| < \varepsilon,$$

conforme desejado.

Note que $\frac{|x-2|}{3} < \varepsilon$ equivale a $|x-2| < 3\varepsilon$. Entretanto, como tivemos de impor a restrição inicial $|x-2|<1$, devemos tomar $\delta > 0$ como o menor dos números 1 e 3ε, isto é, $\delta = \min\{3\varepsilon,1\}$.

Com um tal δ, se $0 < |x-2| < \delta$, então $x \neq 2$ e $|x-2| < 1$, o que garante que $x \in (1,3)$. Além disso, os cálculos que fizemos acima garantem que, para $x \in (1,3)$,

$$0 < |x-2| < 3\varepsilon \Rightarrow \left|f(x)-\frac{1}{3}\right| = \left|\frac{x-1}{x+1}-\frac{1}{3}\right| < \varepsilon.$$

Portanto, dado $\varepsilon > 0$, se tomarmos $\delta = \min\{3\varepsilon,1\}$ teremos que

$$0 < |x-2| < \delta \Rightarrow \left|f(x)-\frac{1}{3}\right| < \varepsilon.$$

Com isso, demonstramos que $\lim_{x\to 2} f(x) = \dfrac{1}{3}$. □

Ainda em relação ao exemplo anterior, podemos considerar a função $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dada por

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se} \quad x \neq 2 \\ 1/3 & \text{se} \quad x = 2 \end{cases}$$

Esta função estende a função f para todo a reta real, e o fato de que

$$g(2) = \frac{1}{3} = \lim_{x\to 2} f(x)$$

pode ser interpretado, geometricamente, dizendo-se que *o gráfico de g não tem interrupções.*

Dicas para o Professor

O material desta aula pode ser coberto em três encontros de 50 minutos cada.

A discussão em torno do que é um ponto de acumulação pode ser feita depois que a definição de limite for apresentada. De toda forma, o problema natural que se põe é: existem elementos x no domínio da função, que estejam tão próximos de a quanto queiramos? Isso motiva a definição de ponto de acumulação.

A experiência mostra que, numa primeira apresentação, a definição formal de limite é difícil de ser digerida pelos alunos. Assim, essa definição é sutil e deve ser apresentada com o devido cuidado, valendo a pena ir bem mais devagar neste ponto crucial.

O Exemplo 5 pode ser modificado para gerar alguns exercícios. Exemplos envolvendo funções quadráticas já apresentam mais dificuldades para a escolha de um δ adequado.

Mais exemplos e resultados podem ser vistos nas sugestões de leitura complementar a seguir.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar*, vol. 3. Coleção do Professor de Matemática, Editora S.B.M., Rio de Janeiro, 2013.

2. G. B. Thomas, et. al. *Cálculo*, vol.1. Pearson, São Paulo, 2014.