Material Teórico - Módulo Números Complexos - Forma Geométrica

Radiciação de números complexos no plano de Argand-Gauss

Terceiro Ano do Ensino Médio

Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

21 de novembro de 2020

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Introdução

Nesta aula, tratamos da operação de radiciação nos números complexos. Radiciação é a operação que comumente chamados de "tirar a raiz", por exemplo, calcular a raiz quadrada ou a raiz cúbica de um número. Antes disso, vamos revisar a radiciação nos números reais.

1.1 Radiciação nos números reais

A radiciação pode ser vista como a operação inversa da potenciação. Vamos começar com o exemplo mais simples: a raiz quadrada.

Seja y um número real positivo. Para que x seja a raiz quadrada de y (em símbolos $x = \sqrt{y}$) impomos duas condições: $x^2 = y$ e $x \geq 0$. Veja que satisfazer à condição $x^2 = y$ é algo necessário mas não é suficiente para que possamos chamar x de raiz quadrada de y: é preciso também que x seja não negativo. Isso acontece porque, para qualquer $y > 0$, a equação $x^2 = y$ possui duas soluções reais, sendo que, por definição, apenas a solução *não negativa* é considerada raiz quadrada de y.

Por exemplo, $\sqrt{16}$ é o número não negativo que satisfaz $x^2 = 16$. Há dois números que satisfazem essa equação: $4^2 = 16$ e $(-4)^2 = 16$, logo $x = 4$ ou $x = -4$. Porém, apenas $x = 4$ é a raiz quadrada (real) de 16. De forma que $\sqrt{16} = 4$ (e nada mais). Por isso, se estivéssemos interessados em resolver apenas a equação $x^2 = 16$, removendo a exigência de que x seja raiz quadrada de 16, devemos escrever $x = \pm\sqrt{16}$ (lê-se x é igual a mais ou menos raiz quadrada de 16) ou, ainda, $x = \pm 4$ (lê-se x é igual a mais ou menos 4).

Exemplo 1. *Calcule o valor de* $\sqrt{(-3)^2}$.

Solução. Veja que $(-3)^2 = 9$. E que $\sqrt{9} = 3$. Assim,

$$\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3.$$

□

De modo geral, note que para x real, $\sqrt{x^2} = |x|$, onde $|x|$ é o valor absoluto (ou módulo) de x.

Pela regra dos sinais, qualquer número real *não nulo* multiplicado por ele próprio é positivo. E se o número for nulo, o resultado desse produto é nulo. Assim, quando $y < 0$ a equação $x^2 = y$ não possui raiz real. Por exemplo, não existe x tal que $x^2 = -16$. Logo, $\sqrt{-16}$ não existe no conjunto dos números reais.

O problema descrito acima acontece com qualquer outro expoente par, mas não acontece para expoentes ímpares. Por exemplo, para qualquer real y (positivo, negativo ou nulo), podemos definir $\sqrt[3]{y}$ como o único número (real) x que satisfaz $x^3 = y$. Por exemplo, $\sqrt[3]{125} = 5$ já que $5^3 = 125$; e $\sqrt[3]{-125} = -5$, já que $(-5)^3 = -125$.

Com isso, chegamos à seguinte definição.

Seja n um inteiro positivo.

- Para n inteiro positivo par e $y \geq 0$:

$$\sqrt[n]{y} = x \iff (x^n = y \text{ e } x \geq 0).$$

- Para n inteiro positivo ímpar e y real qualquer:

$$\sqrt[n]{y} = x \iff x^n = y.$$

1.2 Radiciação nos números complexos via exemplos

Vamos começar, também, analisando o caso das raízes quadradas, agora complexas. Como vimos na seção anterior, a expressão $\sqrt{-16}$ não tem valor definido no conjunto dos números reais. Porém, já sabemos que existem dois números complexos que satisfazem a equação $x^2 = -16$. A saber: $x = 4i$ e $x = -4i$. Apesar do sinal de "menos", o número $-4i$ *não* é considerado um número negativo, assim como o $4i$ não é considerado um número positivo. De fato, esses números encontram-se sobre o eixo imaginário do plano de Argand-Gauss, e a nomenclatura “positivo/negativo” é reservada para números reais, indicando se o número está à esquerda ou à direita do zero sobre a reta real. No caso de raízes complexas, ao contrário das reais, não há uma escolha preferencial sobre qual dos números, $4i$ ou $-4i$, deveria “ganhar o título de raiz quadrada de -16”. Na prática, assume-se que ambos esses números são raízes quadradas complexas de -16. De outra forma, existem duas possíveis raízes *de ordem* 2 do número -16.

É preciso entender que, com esse perspectiva, mesmo existindo raízes quadradas de -16, deve-se evitar usar o símbolo $\sqrt{-16}$, pois este símbolo não deixa claro a qual dos número ($4i$ ou $-4i$) estamos nos referindo. Podemos perguntar “quais as raízes de -16”, mas não “qual a raiz -16”. —

Observação 2. Para fins didáticos, é extremamente comum escrever em $\sqrt{-1} = i$ (de onde seguiria $\sqrt{-16} = 4i$). Porém, também estaria certo dizer que $\sqrt{-1} = -i$. Formalmente, o ideal é não escrever $\sqrt{-1} = i$ e pensar em i simplesmente como uma das raízes da equação $x^2 = -1$ (escolhida arbitrariamente), e $-i$ como a outra raiz.

Quando entramos no domínio dos números complexos, podemos obter raízes quadradas não apenas dos números reais negativos, mas de qualquer número complexo. Vejamos um exemplo nesse sentido.

Exemplo 3. *Encontre todos os números complexos z tais que*

$$z^2 = 2 + 2\sqrt{3}\,i.$$

Solução. Seja $z = a + bi$, em que a e b são números reais. Temos que:

$$z^2 = a^2 - b^2 + 2abi.$$

Usando que $z^2 = 2 + 2\sqrt{3}\,i$, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 2 \\ 2ab = 2\sqrt{3} \end{cases}.$$

Segue que $b = \sqrt{3}/a$ e, substituindo na primeira equação, temos:

$$a^2 - \frac{3}{a^2} = 2 \implies a^4 - 2a^2 - 3 = 0.$$

Seja $x = a^2$. Temos, então, a equação de segundo grau $x^2 - 2x - 3 = 0$, cujo discriminante é igual a

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16.$$

Logo,

$$x = \frac{2 \pm 4}{2} = 3 \text{ ou } -1.$$

Como $x = a^2$ e a é real, temos que $x > 0$; logo, a única opção válida é $x = 3$. Assim, $a^2 = 3$, o que nos dá $a = \sqrt{3}$ ou $a = -\sqrt{3}$. Lembrando que $b = \sqrt{3}/a$, temos duas soluções: $z = \sqrt{3} + i$ e $z = -\sqrt{3} - i$. $\square$

Vejamos, agora, o que acontece com raízes cúbicas. Por exemplo, como podemos calcular $\sqrt[3]{8}$? Nos números reais temos que $\sqrt[3]{8} = 2$, já que $2^3 = 8$ e $x = 2$ é o único número real que satisfaz $x^3 = 8$. Contudo, quando passamos para o conjunto dos números complexos, há outras duas possíveis raízes para tal equação, conforme mostra o exemplo a seguir.

Exemplo 4. *Encontre todos os números complexos z tais que $z^3 = 8$.*

Solução. Escrevendo o número complexo z em sua forma polar, temos que $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$, onde r e θ são números reais. Logo, a primeira fórmula de de Moivre dá

$$z^3 = r^3(\cos(3\theta) + i \operatorname{sen}(3\theta)).$$

Como $8 = 8(\cos(0) + i \operatorname{sen}(0))$, para que $z^3 = 8$ é preciso que

$$r^3(\cos(3\theta) + i \operatorname{sen}(3\theta)) = 8(\cos(0) + i \operatorname{sen}(0))$$

ou seja,

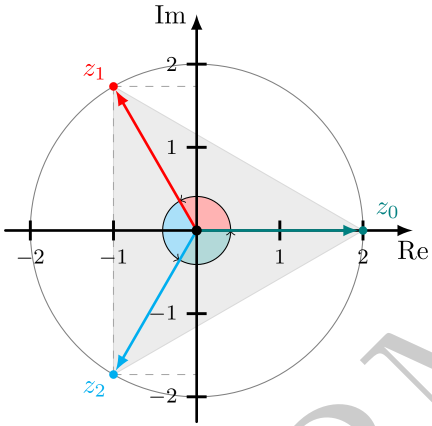
$$r^3 = 8, \quad \cos(3\theta) = \cos(0) \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}(3\theta) = \operatorname{sen}(0).$$

Como r é real, temos que $r = 2$. Para que as outras duas equações sejam satisfeitas simultaneamente, é necessário e suficiente que $3\theta = 2k\pi$, para algum inteiro k. Cada valor inteiros de k, nos dá um valor para z que é solução da equação do enunciado. Contudo, ao substituirmos os (infinitos) valores de k, obtemos apenas três possíveis valores *distintos* para z, que denotaremos por z_0, z_1 e z_2:

$$
\begin{aligned}
k = 0 \implies \theta = 0 \quad & \implies z_0 = 2(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0) = 2, \\
k = 1 \implies \theta = 2\pi/3 & \implies z_1 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right) \\
& \implies z_1 = 2\left(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -1 + \sqrt{3}i, \\
k = 2 \implies \theta = 4\pi/3 & \implies z_2 = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{4\pi}{3}\right) \\
& \implies z_2 = 2\left(\frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -1 - \sqrt{3}i.
\end{aligned}
$$

É possível verificar que para qualquer valor inteiro de k (seja maior que 3 ou negativo), o ângulo θ obtido será congruente a um dos três valores acima (0, $2\pi/3$ ou $4\pi/3$). Por exemplo, para $k = 3$, obtemos $\theta = 6\pi/3 = 2\pi$, sendo que $\cos(2\pi) = \cos 0$ e $\operatorname{sen}(2\pi) = \operatorname{sen} 0$, logo, para esse θ obtemos $z = z_0$.

Também podemos perceber isso geometricamente (acompanhe na figura da próxima página): o incremento de 1 unidade no valor de k corresponde a um incremento de $2\pi/3$ radianos em θ, que é o argumento de z. Assim, ao fazer isso 3 vezes damos uma volta completa no círculo e retornamos ao ponto inicial. A mesma observação implica que os pontos z_0, z_1 e z_2 estão igualmente espaçados em torno de um círculo com centro na origem (o triângulo $z_0z_1z_2$ é equilátero). Esse círculo possui raio $r = 2$, que é o módulo de cada um desses complexos (ver figura abaixo).



□

Do exemplo acima, concluímos que existem 3 raízes cúbicas complexas para o número 8 (sendo exatamente uma delas real).

A escolha de usar a forma polar dos números complexos envolvidos para resolver o exemplo anterior não foi acidental. De fato, conforme veremos, o meio mais simples de lidar com raízes complexas é utilizando a forma polar, já que potenciação na forma polar também é bastante simples.

1.3 Radiciação de complexos (caso geral)

Nesta seção, consideraremos o caso geral, no qual buscamos raízes de ordem n (chamadas raízes n-ésimas) de um número complex, para um inteiro positivo n dado arbitrariamente. Assim, dado um complexo w qualquer, queremos saber se existe um complexo z tal que

$$z^n = w.$$

De certa forma, pensamos como se $z = \sqrt[n]{w}$. Contudo, assim como nos casos anteriores, para todo n inteiro positivo essa equação possui n raízes distintas. Assim, deve-se evitar escrever $\sqrt[n]{w}$, reservando essa notação para números reais.

Observação 5. Conforme dissemos desde a Aula 1 do Módulo "Números Complexos - Forma Algébrica", certas propriedade da operação $\sqrt[n]{\cdot}$, só são válidas no conjunto dos números reais e quando os resultados dessas operações também forem números reais. Por exemplo, este é o caso da propriedade $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$.

Dito isso, para fins didáticos, muito professores utilizam da notação $\sqrt[n]{w}$ para números complexos. Isso deve ser feito apenas em casos onde a escolha exata da raiz não seja importante ou já esteja clara em função do contexto. Isso acontece, inclusive, na vídeo-aulas deste módulo.

Vamos escrever w e z em suas formas trigonométricas:

$$w = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta),$$
$$z = \rho(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha).$$

Usando a fórmula da potenciação (primeira fórmula de De Moivre), temos $z^n = \rho^n(\cos(n\alpha) + i\,\mathrm{sen}(n\alpha))$. Assim, escrevendo a igualdade $z^n = w$ em sua forma trigonométrica, temos:

$$\rho^n(\cos(n\alpha) + i\,\mathrm{sen}(n\alpha)) = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

Para que isso aconteça, o complexo do lado direito e o do lado esquerdo devem possuir o mesmo módulo, logo $\rho^n = r$, e seus argumentos devem ser arcos congruentes (veja a seção "Congruência de Arcos" da aula "Radiano, Círculo Trigonométrico e Congruência de arcos" do Módulo "Círculo Trigonométrico" do Primeiro Ano do Ensino Médio), ou seja,

$$n\alpha - \theta = 2k\pi, \text{ onde } k \in \mathbb{Z}.$$

Assim,

$$\boxed{\rho = \sqrt[n]{r} \;\text{ e }\; \alpha = \frac{\theta + 2k\pi}{n}.}$$

De forma análoga ao Exemplo 4, não obtemos apenas uma única raiz. Mais precisamente, para cada valor de k, temos uma raiz z_k,

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right),$$

que satisfaz $(z_k)^n = w$. Além disso, toda raiz n-ésina de w é da forma acima. A expressão acima é conhecida como a **segunda fórmula de De Moivre**.

Observação 6. Neste ponto, é interessante comparar a fórmula para a potenciação (a primeira fórmula de De Moivre), com a fórmula acima (para radiciação). Usando a abreviação $w = r\,\mathrm{cis}\,\theta$, para cada n inteiro temos que $w^n = r^n\,\mathrm{cis}(n\theta)$. Ou seja, para elevar um número a n-ésima potência, elevamos seu módulo a n e multiplicamos seu argumento por n. Assim, seria natural chutar que $\sqrt[n]{w}$ fosse igual a $\sqrt[n]{r}\ \mathrm{cis}(\frac{\theta}{n})$. Acontece que, apesar de $\sqrt[n]{r}\ \mathrm{cis}(\frac{\theta}{n})$ ser uma das raízes n-ésima de w (obtida fazendo $k = 0$ na segunda fórmula de De Moivre), esta *não* é a única raiz. O que a fórmula nos diz é que para encontrar as demais raízes, devemos somar múltiplos inteiros de 2π ao argumento de w antes de dividi-lo por n, obtendo números da forma:

$$\sqrt[n]{r}\ \mathrm{cis}\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right).$$

De forma análoga ao Exemplo 4, apesar de existir uma infinidade de valores para k, há exatamente n números complexos *distintos*, z, que satisfazem $z^n = w$. Esses números podem ser obtidos, por exemplo, variando k no conjunto $\{0, 1, \ldots, n-1\}$.

Realmente, ao aumentarmos o valor de k em uma unidade, o módulo de z_k permanece o mesmo e seu argumento aumenta em $2\pi/n$ radianos. Assim, após k variar n unidades, completamos uma volta (2π) em torno do círculo de raio $\sqrt[n]{r}$. De fato, para todo t inteiro, $z_{t+1} = z_t\,\mathrm{cis}(\frac{2\pi}{n})$, logo, o ângulo formado pelos segmentos que vão da origem (do plano de Argand-Gauss) até afixos de z_t e z_{t+1} é igual a $2\pi/n$, para qualquer que seja t.

Esse raciocínio também mostra que, para $n \geq 3$, os afixos dos complexos $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ formam um polígono regular inscrito no círculo de raio $\sqrt[n]{r}$; e que $z_n = z_0$, $z_{n+1} = z_1$ e assim por diante. (Quando $n = 2$ elas não formam um polígono, já que um polígono precisa ter pelo menos 3 vértices; mas as raízes ainda dividem o círculo em arcos iguais, logo, elas são diametralmente opostas).

Exemplo 7. *Determine as raízes quartas de i.*

Solução. Escrevendo o complexo i em sua forma trigonométrica, temos

$$i = 1 \cdot \left(\operatorname{cis} \frac{\pi}{2}\right),$$

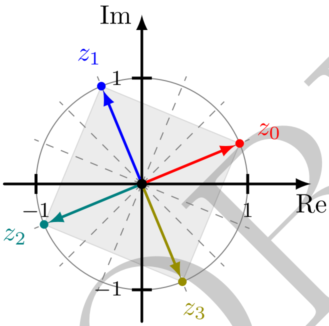
uma vez que $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ e $\operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1$. (Alternativamente, lembre que o número i possui módulo 1 e está sobre o eixo-imaginário, logo seu argumento equivale a 90 graus, ou seja, é igual a $\pi/2$ radianos). Usando a segunda fórmula de De Moivre, temos:

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{i} &= \sqrt[4]{1} \operatorname{cis}\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{4}\right) \\ &= \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}\right),\end{aligned}$$

para k inteiro qualquer. Mas vimos que é suficiente fazer $k = 0, 1, 2, 3$, para obter todas as raízes quartas distintas.

$$\begin{aligned}
k = 0 &\implies z_0 = \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{8}\right) = \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{8}\right) \\
k = 1 &\implies z_1 = \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{8}\right) \\
k = 2 &\implies z_2 = \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{8} + \frac{2\pi}{2}\right) = \operatorname{cis}\left(\frac{9\pi}{8}\right) \\
k = 3 &\implies z_3 = \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{2}\right) = \operatorname{cis}\left(\frac{13\pi}{8}\right).
\end{aligned}$$

Para finalizar, vamos marcar todas essas raízes no plano de Argand-Gauss. Como todas elas possuem módulo 1, elas estão sobre o círculo de raio 1 com centro na origem. A primeira raiz, z_0, possui argumento $\pi/8$. Lembre-se de que i possui argumento $\pi/2$ (que corresponde a 90 graus). Como $(\pi/8)/(\pi/2) = 1/4$, devemos dividir o arco do primeiro quadrante em quatro partes iguais e marcar z_0 no fim da primeira parte. Como temos 4 raízes, o incremento no argumento de uma raiz para a seguinte é de $2\pi/4 = \pi/2$, ou seja, 90 graus. E as raízes, z_0, z_1, z_2, z_3 são vértices de um quadrado.



□

Observação 8. Ainda sobre o exemplo anterior, é fácil usar a primeira fórmula de De Moivre para verificar (de outra maneira) que os números z_0, z_1, z_2, z_3 são raízes quartas de i. Por exemplo, para z_1 temos:

$$\begin{aligned}(z_1)^4 &= \left(\operatorname{cis}\frac{5\pi}{8}\right)^4 = \operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{8}\cdot 4\right)\\ &= \operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{2}\right) = \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2}+2\pi\right)\\ &= \operatorname{cis}\left(\pi/2\right) = i.\end{aligned}$$

Para z_2, temos

$$\begin{aligned}(z_2)^4 &= \left(\operatorname{cis}\frac{9\pi}{8}\right)^4 = \operatorname{cis}\left(\frac{9\pi}{8}\cdot 4\right)\\ &= \operatorname{cis}\left(\frac{9\pi}{2}\right) = \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2}+4\pi\right)\\ &= \operatorname{cis}\left(\pi/2\right) = i.\end{aligned}$$

Por fim, deixamos como exercício as verificações análogas para z_0 e z_3.

Exemplo 9. *Determine as raízes quadradas de* $1+i$.

Solução. Poderíamos resolver esse problema montando um sistema, assim como fizemos no Exemplo 3. Porém, usando a segunda fórmula de De Moivre temos uma solução mais simples. Escrevendo $1+i$ em sua forma trigonométrica, temos:

$$\begin{aligned}1+i &= \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\\ &= \sqrt{2}\left(\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}\right).\end{aligned}$$

Aplicando a fórmula para raízes de ordem dois, temos que as raízes possuem a forma:

$$z_k = \sqrt{\sqrt{2}}\left(\operatorname{cis}\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{2}\right), \quad k\in\mathbb{Z}.$$

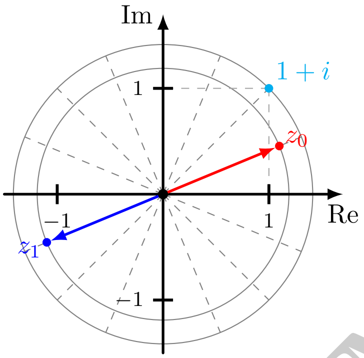
Para $k=0$ obtemos a raiz:

$$z_0 = \sqrt[4]{2}\left(\operatorname{cis}\frac{\pi}{8}\right).$$

Para $k=1$ obtemos a raiz

$$z_1 = \sqrt[4]{2}\left(\operatorname{cis}\frac{9\pi}{8}\right).$$

Os demais valores de k produzem raízes iguais a uma das duas acima. Assim z_0 e z_1 são as duas raízes complexas de $1+i$. Os afixos de $1+i$, z_0 e z_1 são exibidos na figura abaixo. Observe que $1+i$ possui módulo $\sqrt{2}$ enquanto que z_0 e z_1 possui módulo $\sqrt[4]{2}$ (ou seja, estão em um círculo de raio menor do que o de $1+i$).



$\square$

Exemplo 10. *Encontre as raízes da equação* $x^6+26x^3-27=0$ *no universo dos números complexos.*

Solução. Essa equação é de sexto grau, mas pode ser facilmente transformada em uma equação de segundo grau por uma mudança de variável: fazendo $y=x^3$, temos que $y^2+26y-27=0$.

Poderíamos resolver essa equação usando a fórmula de Bhaskara, mas também é fácil resolvê-la pelas relações de Girard: devemos buscar dois números cuja soma é igual a -26 e cujo produto é -27. Podemos concluir que as raízes (em y) são 1 e -27. Agora, tratamos dos dois casos:

Caso 1: $x^3=1$. No conjunto dos reais, há apenas uma solução $x=\sqrt[3]{1}=1$ para este caso. Porém, nos complexos há outras duas solução (pois existem 3 raízes cúbicas). Escrevendo 1 em sua forma trigonometria, temos:

$$1=\operatorname{cis}(0).$$

Usando a segunda fórmula de De Moivre, temos as raízes

$$\sqrt[3]{1}\operatorname{cis}\left(\frac{0+2k\pi}{3}\right),\ \text{para } k\in\{0,1,2\}.$$

Temos, então, a três raízes: $\text{cis}(0)$, $\text{cis}(\frac{2\pi}{3})$ e $\text{cis}(\frac{4\pi}{3})$. Colocando de volta esses números na forma algébrica temos:

$$\begin{aligned}\text{cis}(0) &= 1,\\ \text{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right) &= -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\\ \text{cis}\left(\frac{4\pi}{3}\right) &= -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.\end{aligned}$$

(Veja que o primeiro é igual a 1, que corresponde à raiz real já encontrada anteriormente).

Caso 2: $x^3 = -27$. No conjunto dos reais, há apenas uma solução $x = \sqrt[3]{-27} = -3$ para este caso. Mas, assim como no caso anterior, há outras duas raízes complexas neste caso. Escrevendo -27 em sua forma trigonometria, temos:

$$-27 = 27(-1+0i) = 27\,\text{cis}(\pi).$$

Usando a segunda fórmula de De Moivre, temos as raízes

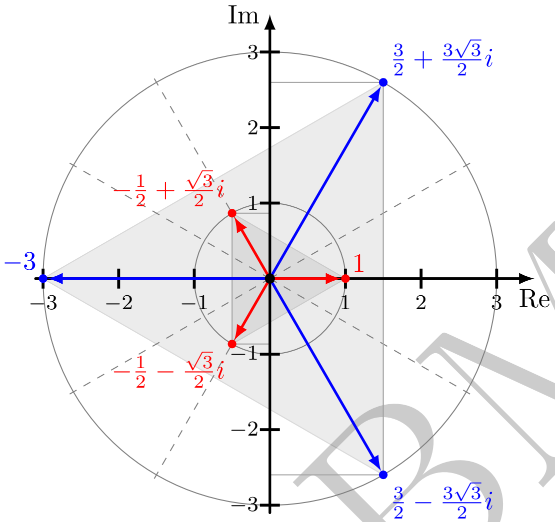
$$\sqrt[3]{27}\,\text{cis}\left(\frac{\pi+2k\pi}{3}\right), \text{ para } k \in \{0,1,2\}.$$

Temos, então, a três raízes: $3\,\text{cis}(\frac{\pi}{3})$, $3\,\text{cis}(\pi)$ e $3\,\text{cis}(\frac{5\pi}{3})$. Colocando de volta esses números na forma algébrica temos:

$$\begin{aligned}3\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right) &= 3\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right),\\ 3\,\text{cis}(\pi) &= -3,\\ 3\,\text{cis}\left(\frac{5\pi}{3}\right) &= 3\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right).\end{aligned}$$

(Veja que o segundo é igual a -3, que corresponde à raiz real já encontrada anteriormente).

Note que, ao todo, obtivemos seis raízes. Elas estão marcadas no plano de Argand-Gauss abaixo.



□

Exemplo 11. *Encontre a solução da equação* $z^{10} = i$ *cujo argumento está estritamente entre* $120°$ *e* $180°$.

Solução. Já vimos que $i = \operatorname{cis} \frac{\pi}{2}$, logo, as raízes décimas de i são da forma:

$$z_k = \operatorname{cis}\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{10}\right) = \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{5}\right),$$

para $k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$.

Convertendo, $\frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{5}$ para graus, os argumentos desses complexos possuem a forma $9 + 36k$, em que $k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$. Queremos saber qual desses ângulos é congruente a um arco que está entre $120°$ e $180°$. Como para todo $k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, o ângulo de $9 + 36k$ graus está entre 0 e $360°$, é suficiente resolver a inequação:

$$120 < 9 + 36k < 180.$$

O lado esquerdo nos dá: $36k > 120 - 9 = 111$; logo, $k > 111/36 = 3{,}083$. O lado direito nos dá $36k < 180 - 9 = 171$;

logo, $k < 171/26 = 4{,}75$. O único número inteiro neste intervalo é $k = 4$. Assim, a solução desejada é

$$z_4 = \operatorname{cis}\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 8\pi}{10}\right) = \operatorname{cis}\left(\frac{17\pi}{20}\right).$$

$\square$

Dicas para o Professor

O conteúdo desta aula pode ser coberto em dois encontros de 50 minutos.

O estudo dos números complexos é intrinsecamente relacionado com o estudo da Trigonometria e das soluções de equações polinomiais. Para essa aula, não precisamos usar nada muito avançado de Trigonometria, mas assumimos que os alunos tenham uma boa familiaridade com a forma polar dos números complexos (vista nas aulas anteriores) e saibam verificar quando dois arcos sobre o círculo trigonométrico são congruentes. Também, apenas tocamos superficialmente na relação entre números complexos e soluções de equações polinomiais, mas teremos mais a dizer sobre isso em materiais futuros.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 6: Polinômios.* SBM, Rio de Janeiro, 2016.

2. Complex Numbers, página online da Wikipedia (em inglês), `https://en.wikipedia.org/wiki/Number`.