Material Teórico - Tópicos Adicionais - Introdução à Teoria dos Grafos

Introdução à Teoria dos Grafos - Parte 1

Tópicos Adicionais

Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

13 de julho de 2019

1 Introdução à Teoria dos Grafos

No conjunto de aulas que agora se inicia, introduzimos o conceito de *Grafo* (não confundir com gráfico) focando em exemplos e na modelagem de problemas. A *Teoria dos Grafos*, como disciplina, surgiu no século XVIII, quando começou a ser estudada sistematicamente pelo influente e prolífico matemático suíço Leonhard Euler. Mas apenas no século XX ela chega à maturidade, passando de uma mera coleção de resultados desconexos a uma subárea estruturada da chamada *Matemática Discreta*. Em parte, isso se deveu ao grande número de aplicações à Ciência da Computação, a qual se desenvolveu rapidamente no mesmo período. Apesar de sua simplicidade, esse tema não faz parte do currículo usual do Ensino Médio e costuma ser estudado apenas em cursos especializados, no Ensino Superior.

Antes de definir o que é um grafo, vejamos um problema famoso estudado por Euler.

Problema 1. *Os habitantes da cidade de Königsberg se perguntavam se seria possível atravessar todas as sete pontes do Rio Pregel (ver Figura 1) sem passar duas vezes pela mesma ponte e retornando ao ponto de partida.*

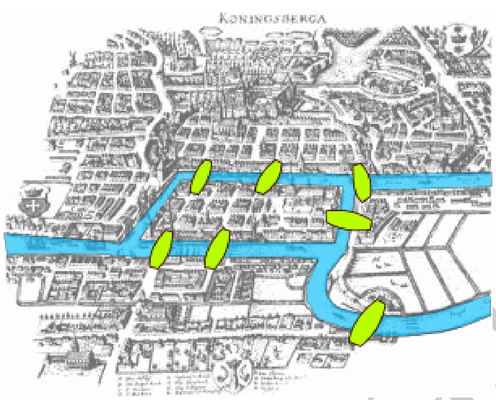


Figura 1: a cidade de Königsberg em 1736.

Solução. A ideia de Euler foi extrair as informações essenciais necessárias para resolver esse problema. Veja que o rio divide a cidade em quatro regiões: uma ilha central, uma região acima, outra abaixo e outra à direita. Para resolver o problema, não interessa como o habitante se locomove dentro de uma dessas regiões. O que importa é qual ponte será utilizada quando passamos de uma região para outra.

Dessa forma, ignorando as informações geométricas sobre cada região do mapa, vamos representar cada uma delas por um único ponto. Chamaremos esses pontos de *vértices*. Por sua vez, cada ponte da cidade é representada por uma curva ligando os pontos correspondentes às regiões que a ponte conecta. Essas curvas serão chamadas de *arestas*. O resultado está representado na Figura 2

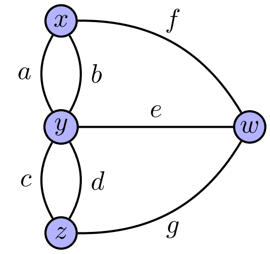


Figura 2: esquema simplificado das pontes de Königsberg. As informações geométricas dessa figura, tais como o comprimento de cada curva, são irrelevantes; assim, a mesma poderia ter sido desenhada de várias outras formas.

O problema, agora, equivale a percorrer as 7 arestas da Figura 2, sem tirar a caneta do papel, passando exatamente uma vez por cada uma e retornando ao vértice de partida. O problema é que, como queremos realizar um percurso fechado, sempre que usarmos uma aresta para chegar a um dos vértices, precisaremos usar uma outra aresta para sair desse vértice (a fim de, eventualmente, retornar ao ponto inicial). De forma semelhante, para o vértice inicial, sempre que usarmos uma aresta para sair dele, precisaremos usar outra para voltar. Como não podemos passar duas vezes sobre uma mesma aresta, seria necessário que cada um dos vértice tocasse uma quantidade par de arestas. Porém, cada vértice da Figura 2 toca uma quantidade ímpar de arestas. Logo, tal percurso não existe. □

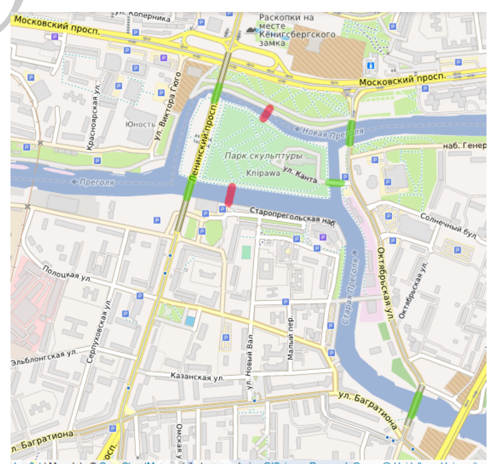


Figura 3: mapa atual da antiga cidade de Königsberg, agora chamada de Kaliningrado. Duas das sete pontes originais foram removidas. As demais existem até hoje. Imagem obtida do GoogleMaps.

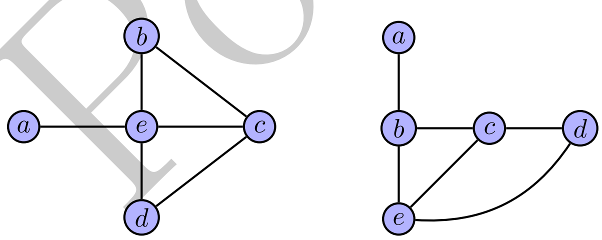
Observação 2. *Na solução acima,* bastaria existir um único vértice *que toca uma quantidade ímpar de arestas para garantir que o percurso desejado não existe. Euler resolveu a generalização desse problema, para um número arbitrário de vértices e arestas, provando que a condição de* *que todos os vértices toquem uma quantidade par de arestas é não apenas necessária, mas também suficiente, no caso de grafos conexos. A seguir, veremos o que é um grafo e nas aulas seguintes veremos o que significa um grafo ser conexo.*

Um **grafo** G é um objeto matemático formado por um conjunto de **vértices** e um conjunto de **arestas**, onde cada aresta corresponde a um par não ordenado de vértices. Usualmente o conjunto dos vértices é representado pela letra V e o das arestas pela letra E (pois em Inglês arestas são chamadas de "edges"; e em português elas também podem ser chamadas de elos).

Por exemplo, no grafo da Figura 2, temos $V = \{x, y, z, w\}$ e $E = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, onde a aresta a corresponde ao par $\{x,y\}$, etc. Os 2 vértices que correspondem a uma aresta são chamados de extremidades dela. Uma aresta em que as duas extremidades são iguais é chamada de **laço** ou "**loop**" (e no desenho é representada por uma curva que liga um vértice a ele próprio). Na Figura 2 não há laços.

Quando cada par de vértices de um grafo corresponde a no máximo uma aresta e o grafo não possui laços dizemos que ele é um o **grafo simples**. O grafo da Figura 2 possui mais de uma aresta entre alguns pares de vértices e, por isso, ele não é simples. Neste caso ele passa a ser chamado de **multigrafo**. Quando o grafo é simples, podemos considerar que cada aresta é o próprio conjunto formado por suas duas extremidades; em um tal caso, por simplicidade, escrevemos apenas xy no lugar de $\{x, y\}$.

Na Figura 4 temos exemplos de dois grafos simples. É importante ressaltar que o desenho em si não é o grafo, mas sim uma representação dele. O grafo é formado apenas por seu conjunto de vértices, seu conjunto de arestas e pela correspondência entre arestas e vértices, não importando a posição em que os vértices sejam desenhados no plano ou o formato das curvas que representam as arestas. Por exemplo, na Figura 5 temos uma outra maneira de desenhar o grafo G_1 exibido na Figura 4a, pois temos o mesmo conjunto de vértices e as mesmas arestas: ae, eb, ed, ec, bc, cd. Assim, esses grafos são iguais. Por outro lado, os dois grafos da Figura 4 são diferentes pois, por exemplo, G_1 tem a aresta ae mas G_2 não possui essa aresta.



(a) um grafo G_1. (b) um grafo G_2.

Figura 4: dois grafos simples.

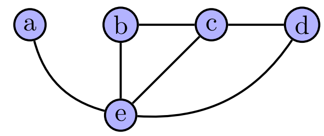
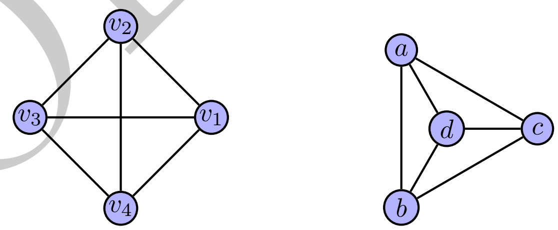


Figura 5: Outra representação do grafo G_1 da Figura 4a.

Quando um grafo pode ser obtido à partir de outro mudando apenas os nomes dos vértices dizemos que os dois grafos em questão são **isomorfos**. Veja que não é necessário trocar os nomes de todos os vértices e que um grafo é sempre isomorfo a ele próprio. Formalmente, um grafo simples G_1, com conjunto de vértices V_1, e um grafo G_2, com conjunto de vértices V_2, são isomorfos quando existe uma bijeção $f : V_1 \to V_2$ tal que, para quaisquer $u, v \in V_1$, temos que uv é uma aresta de G_1 se, e somente se, $f(u)f(v)$ é uma aresta de G_2. Nesse caso, dizemos que f é uma bijeção que *preserva incidência*.

Exemplo 3. *Os grafos da Figura 6 são isomorfos, uma vez que podemos usar a seguinte bijeção que preserva incidência entre os vértices de* H_1 *e os vértices de* H_2*:* $v_1 \to a$, $v_2 \to b$, $v_3 \to c$ *e* $v_4 \to d$.



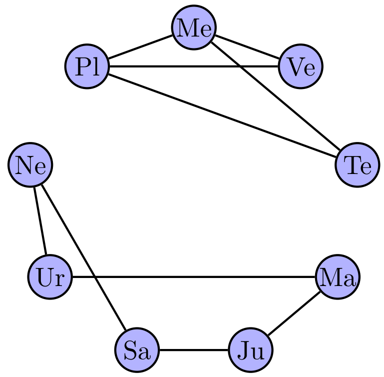
(a) um grafo H_1. (b) um grafo H_2.

Figura 6: dois grafos isomorfos.

O exemplo a seguir ilustra como podemos utilizar um grafo para representar e organizar informações de uma maneira facilmente reconhecível pelo cérebro.

Exemplo 4. *No ano* 3000 *será possível viajar entre os planetas usados as seguintes rotas (todas de mão dupla): Terra–Mercúrio; Plutão–Vênus; Terra–Plutão; Plutão–Mercúrio; Mercúrio–Vênus; Urano–Netuno; Netuno–Saturno; Saturno–Júpiter; Júpiter–Marte e Marte–Urano. Será possível viajar da Terra para Marte?*

Solução. Para visualizar a informação do enunciado com maior clareza, vamos construir um grafo, associando cada vértice a um planeta e incluindo uma aresta entre dois vértices sempre que existir uma rota direta entre os planetas correspondentes. O resultado obtido é exibido na figura a seguir.



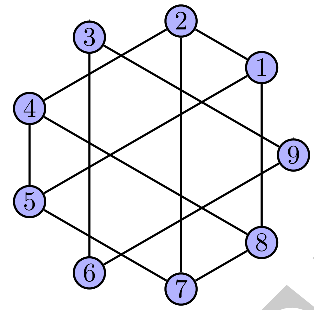
Agora, é fácil ver que, saindo da Terra, só podemos alcançar os planetas Mercúrio, Vênus e Plutão, não sendo possível chegar até Marte. □

Como podemos perceber pela discussão que fizemos até aqui, grafos podem ser usados para representar objetos de diferentes naturezas. Em um dos problemas anteriores, os vértices representavam regiões de um mapa e as arestas representavam pontes; em outro, os vértices representam planetas e as arestas representam rotas. Outras situações comuns são: (i) vértices representam pessoas e as arestas indicam quais pessoas são amigas; (ii) vértices representam antenas e as arestas indicam que o sinal de uma das antenas pode causar interferência no sinal da outra; (iii) vértices representam regiões de um mapa e as arestas indicam quais regiões possuem uma fronteira em comum; (iv) vértices representam sites da Internet e as arestas indicam que existe um hiperlink de um para o outro. Em alguns desses casos, podemos trabalhar com *grafos direcionados*, no lugar de grafos simples, fazendo com que cada arestas tenha um *sentido de percurso* (passando a ser um par ordenado de vértices).

Os exemplos seguintes mostram situações mais inusitadas, onde não é óbvio que podemos construir um grafo para resolver o problema colocado.

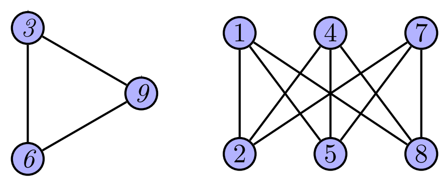
Exemplo 5. *Escreva o número* 1 *numa folha de papel. Uma vez feito isso, se num determinado instante o número* x *estiver escrito no papel, é permitido apagá-lo e escrever um natural* y *tal que* $1 \leq y \leq 9$ *e* $x + y$ *seja múltiplo de* 3. *Fazendo isso várias vezes, é possível escrever o número* 9 *no papel?*

Solução. Vamos construir um grafo cujos vértices são os números naturais de 1 até 9, acrescentando uma aresta ligando os vértices x e y sempre que $x + y$ for múltiplo de 3 (ou seja, sempre que for permitido fazer a troca de x por y no papel). Para cada vértice, verifique a quais outros vértices ele se liga pro arestas e veja que obtemos o grafo seguinte:



Em particular, veja que se x for um natural múltiplo de 3, então, para que $x + y$ também seja múltiplo de 3, é necessário e suficiente y seja múltiplo de 3. Por isso, o grafo (acima) possui um triângulo formado pelos vértices 3, 6 e 9 e estes vértices não estão ligados a nenhum outro. Com isso, já podemos concluir que partindo do número 1 não podemos chegar ao número 9, pois não há como sair do vértice 1 e chegar ao 9 se locomovendo apenas pelas arestas. □

Observação 6. *Na solução do Exemplo 5 escolhemos desenhar os vértice em ordem crescente ao redor de um círculo e desenhar as arestas testando a condição do problema para cada par de vértices. A figura abaixo mostra uma outra maneira de desenhar o mesmo grafo. De fato, perceba que, além do triângulo mencionado na solução anterior, qualquer outra aresta deve ligar um número que deixa resto* 1 *na divisão por* 3 *com outro que deixa resto* 2 *na divisão por* 3.



Para o próximo exemplo, recordamos que cavalos são peças de xadrez que se movimentam apenas em "L", andando exatamente duas casas em uma direção (horizontal ou vertical) seguidas de uma casa na direção perpendicular (veja a Figura 7).

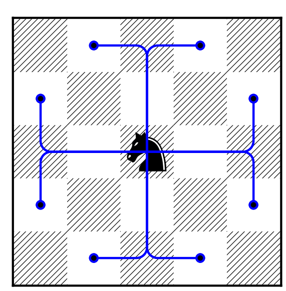
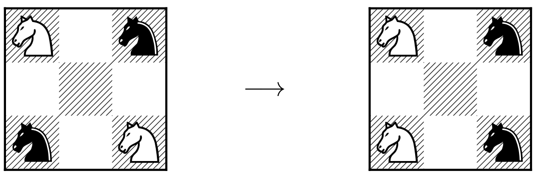


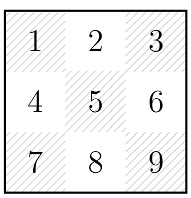
Figura 7: movimentos do cavalo de xadrez.

Esse movimento é realizado como um salto, sendo importante apenas a casa inicial e final do “L” (podendo haver peças nas casas intermediárias).

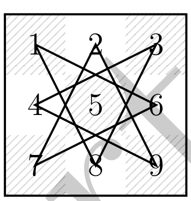
Exemplo 7. *Considere um tabuleiro de xadrez modificado, com apenas* 3 *linhas e* 3 *colunas (ao invés de 8). Nele, colocamos dois cavalos brancos e dois cavalos pretos, conforme indicado do lado esquerdo da figura abaixo. Decida se é possível, usando apenas os movimentos do cavalo, sem sair do tabuleiro* 3×3 *e sem que haja duas peças em uma mesma casa, obter a configuração indicada no tabuleiro da direita da figura.*



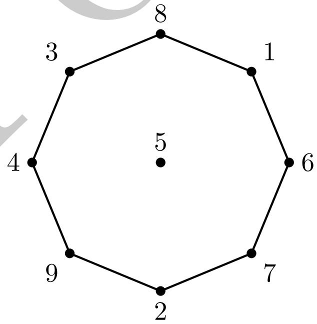
Solução. Vamos começar numerando as casas do tabuleiro 3×3 como na figura seguinte.



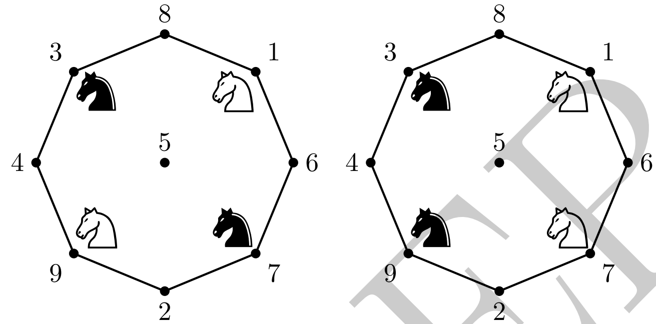
Em seguida, construímos um grafo onde cada casa do tabuleiro é um vértice e adicionamos uma aretas entre duas casas se é possível ir de uma para a outra com um único movimento do cavalo. Obtemos o seguinte:



Veja que a casa 5 nunca pode ser alcançada e que de cada uma das demais casas partem exatamente duas arestas. Podemos, então, redesenhar o grafo da seguinte forma.



Por fim, vamos marcar as posições onde se encontram os cavalos nos dois tabuleiros indicados no enunciado.



Perceba que na configuração da esquerda as cores dos cavalos estão alternadas e na da direita isso não acontece. Como os cavalos só se movem pelas arestas e dois deles não podem ocupar um mesmo vértice, fica claro que não podemos obter a configuração da direita partindo da configuração da esquerda, pois não podemos mudar a ordem relativa entre eles. □

2 Grau de um vértice

Se v é um vértice de um grafo, a quantidade de arestas que possuem v como extremidade é chamada de **grau** de v (em Inglês, “degree of v”). Vamos denotar o grau de v por $d(v)$. Por exemplo, considerando o grafo G_1 da Figura 5, temos:

$$d(a) = 1, \quad d(b) = 2, \quad d(c) = 3, \quad d(d) = 2, \quad d(e) = 4.$$

O próximo exemplo ilustra um tipo importante de contagem envolvendo o conceito de grau.

Exemplo 8. *Temos um conjunto de* 100 *cidades. Alguns pares de cidades são ligadas por estradas diretas (de mão dupla). Cada estrada conecta apenas um par de cidades e as estradas não se intersectam. Sabendo que de cada cidade partem exatamente* 4 *estradas, calcule o número total de estradas.*

Solução. Vamos pensar em cada cidade como um vértice e nas estradas como arestas. Temos, assim, um grafo onde o grau de cada um dos vértices é igual a 4. Contudo, é impossível desenhar esse grafo aqui. Primeiro, porque ele é muito grande (100 vértices), segundo porque ele não é único (há vários grafos que satisfazem a condição do enunciado, já que não há como saber exatamente quais cidades são ligadas a quais). Assim, nossa solução deve funcionar para qualquer um desses grafos. Realmente, veremos que há uma maneira bastante simples de contar o número de arestas (ou seja, de estradas).

A princípio, como temos 100 cidades e de cada cidade partem 4 estradas, multiplicando 100 por 4 teríamos 400 estradas. Mas essa conta está errada! O problema é que cada estrada possui duas extremidades, logo, cada estrada está sendo contada exatamente duas vezes na multiplicação que fizemos. Para corrigir, basta dividir o total obtido por 2. Assim, há $\frac{4 \cdot 100}{2} = 200$ estradas. $\square$

Exemplo 9. *Existe algum polígono convexo com exatamente 30 diagonais?*

Solução. Podemos pensar em cada vértice do polígono como um vértice de um grafo, cujas arestas correspondem às diagonais do polígono. Se o polígono possui n vértices, temos que cada vértice do grafo tem grau $n-3$. De fato, de cada vértice parte uma diagonal para cada um dos outros, exceto para ele próprio e para seus dois vizinhos no polígono (para onde partem lados e não diagonais). Pelo mesmo raciocínio do Exemplo 8, temos que o grafo possui um total de $\frac{n(n-3)}{2}$ arestas. (Lembre-se de que essa é justamente a fórmula para o número de diagonais de um polígono convexo).

Assim, o problema se reduz a decidir se existe algum número n natural tal que

$$\frac{n(n-3)}{2} = 30,$$

ou seja, $n(n-3) = 60$. Podemos resolver essa equação como uma equação de segundo grau e verificar que suas raízes não são inteiras. Mas há uma maneira mais simples. Observe que à medida que n aumenta, $n-3$ também aumenta, logo, o produto $n(n-3)$ aumenta. Testando algumas valores pequenos de n, vemos que para $n = 9$ temos $n(n-3) = 9 \cdot 6 = 54 < 60$ e, para $n = 10$, temos $n(n-3) = 10 \cdot 7 = 70 > 60$. Assim, para $n \leq 9$ o número de diagonais será menor do que 30 e para $n \geq 10$ o número de diagonais será maior do que 30. Portanto, não há como esse número ser exatamente 30. $\square$

O teorema seguinte generaliza os exemplos 8 e 9.

Teorema 10 (Euler). *A soma dos graus dos vértices de um grafo é igual a duas vezes o número de arestas nesse grafo. Em símbolos:*

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2\,|E|.$$

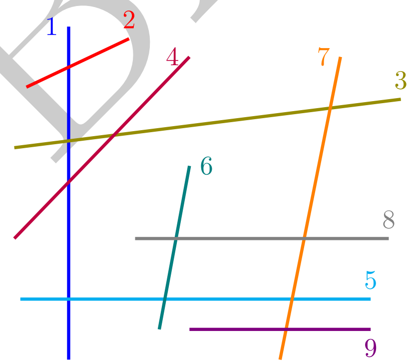
Prova. Imagine o grafo desenhado e, para cada vértice, conte seu grau. Ao fazer isso, marque cada uma das arestas que possuem aquele vértice como extremidade. Por um lado, o número de total de marcas que foram utilizadas é exatamente a soma dos graus dos vértices. Por outro lado, veja que cada aresta foi marcada exatamente duas vezes (uma vez para cada uma de suas extremidades). Dessa forma o número de marcas utilizadas é exatamente duas vezes o número de arestas. Concluímos, então, que a soma dos graus é igual a duas vezes o número de arestas. $\square$

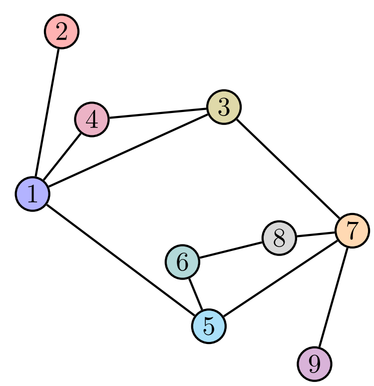
Os grafos dos exemplos 8 e 9 são tais que todos os vértices possuem o mesmo grau. Quando isso acontece, dizemos que o grafo é **regular**. De mogo geral, concluímos que em um grafo regular com n vértice, em que cada vértice possui grau r, temos que nr é igual a duas vezes o número de arestas.

No exemplo seguinte, vamos montar um grafo inusitado para analisar uma situação aparentemente bastante complicada.

Exemplo 11. *Mostre que não é possível desenhar 9 segmentos de reta num plano de modo que cada segmento intersecte exatamente 3 outros.*

Solução. Suponha que 9 segmentos foram desenhados num plano (não necessariamente satisfazendo a condição do enunciado). Normalmente pensamos nas arestas de um grafo como segmentos. Contudo, na solução desse exemplo, vamos criar grafo onde cada vértice representa um dos segmentos desenhados e vamos incluir uma aresta entre dois vértices desse grafo se os segmentos que correspondem a eles se intersectam. A figura abaixo mostra um exemplo de um grafo obtido dessa forma.





Se fosse possível fazer com que cada segmento intersectasse exatamente 3 outros, o resultado seria um grafo com 9 vértices em que cada vértice possuiria grau 3. Em tal grafo, $9 \cdot 3$ seria igual a duas vezes o número de arestas. Logo, o número de arestas deveria ser $9 \cdot 3/2 = 27/2 = 13{,}5$. Mas isso é impossível, pois o número de arestas é um inteiro. Logo, não é possível que cada um dos 9 segmentos intersecte exatamente 3 outros. $\square$

O teorema seguinte é um fato mais geral no mesmo espírito.

Teorema 12. *Em todo grafo, a quantidade de vértices que possuem grau ímpar é um número par.*

Prova. Seja G um grafo com n vértices e sejam $d_1, \ldots, d_n$ os graus desses vértices. Suponha que, dentre eles, há r valores pares e s valores ímpares. Digamos que $p_1, \ldots, p_r$ são os pares e $i_1, \ldots, i_s$ são os ímpares. Dessa forma, temos que:

$$2|E| = d_1 + \ldots + d_n = (p_1 + \ldots + p_r) + (i_1 + \ldots + i_s).$$

Assim, temos

$$(i_1 + \ldots + i_s) = 2|E| - (p_1 + \ldots + p_r).$$

Como somas e subtrações de números pares resultam em números pares, a igualdade acima garante que $i_1 + \ldots + i_s$ é par. Agora, lembre-se de que cada um dos número $i_1, \ldots, i_s$ é ímpar e, para que uma soma de números ímpares resulte em um número par, é necessário que a quantidade de parcelas seja par. Assim, s é par, como queríamos demonstrar. $\square$

Dicas para o Professor

Sugerimos que o conteúdo dessa aula seja abordado em dois encontros de 50 minutos. Aqui, abordamos o assunto pensando em alunos de Ensino Médio. Assim, tentamos usar um mínimo de formalismo sem perder muito da precisão. Várias questões de olimpíadas de Matemática abordam o "tema grafos" mascarando a abstração de vértices e arestas com exemplos concretos (como cidades e estradas). Contudo, parte da beleza de estudar grafos consiste em observar que problemas completamente diferentes do mundo real podem ser abstraídos para o mesmo problema sobre grafos. Por exemplo, tanto o problema do Exemplo 4 como o do Exemplo 5 consistem em determinar se existe um caminho entre dois vértices de um grafo adequado. É interessante ressaltar esse tipo de conexão. Na aula seguinte veremos mais exemplos disso.

Sugestões de Leitura Complementar

Há inúmeros materiais complementares disponíveis sobre grafos, nos mais diversos níveis. Vários exercícios resolvidos (alguns bem mais difíceis do que os expostos aqui) podem ser encontrados nas aulas do POTI [5.] Para uma abordagem mais sistemática o leitor pode consultar [1.] e [3.] As notas de aula em [2.] trazem uma abordagem mais formal, voltada a cursos universitários introdutórios. Por fim, o livro [4.] (em Inglês), traz 470 páginas sobre grafos, com um curso completo e formal.

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 4: Combinatória.* SBM, Rio de Janeiro, 2013.

2. P. Feofiloff, Y. Kohayakawa, Y. Wakabayashi. *Um introdução Sucinta à Teoria dos Grafos.* Diponível em: `https://www.ime.usp.br/~yw/publications/books/TeoriaDosGrafos.pdf`

3. S. Jurkiewicz. *Grafos – Uma Introdução (apostila)*, OBMEP.

4. D. West, *Introduction to Graph Theory (2nd Edition)*, em Inglês, Editora Pearson.

5. No site `https://poti.impa.br/` clique em Materiais e em seguida em "Baixar todo o material compactado". Há aulas sobre grafos nas pastas de Combinatória dos níveis 2 e 3.