Material Teórico - Módulo de Semelhança de Triângulos e Teorema de Tales

Teorema de Tales - Parte III

Nono Ano do Ensino Fundamental

Prof. Marcelo Mendes
Prof. Antonio Caminha

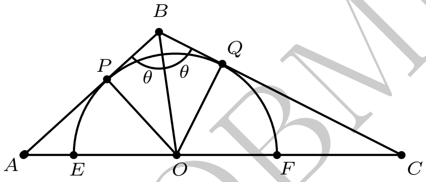
15 de Abril de 2026

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Este material conclui a apresentação das aplicações dos teoremas de Tales e da bissetriz, discutindo mais alguns exemplos interessantes.

Exemplo 1. *No triângulo ABC, em que $AB = 12$, $BC = 18$ e $AC = 25$, um semicírculo é desenhado com diâmetro sobre o lado AC, de tal forma que ele seja tangente aos lados AB e BC. Sendo O o centro do semicírculo, encontre a medida de AO.*

Solução. A figura a seguir representa a situação descrita no enunciado. Nela, P e Q são os pontos de tangência do semicírculo com os lados AB e BC, respectivamente.



Uma vez que as tangentes traçadas a um círculo a partir de um mesmo ponto têm comprimentos iguais, temos $BP = BQ$. Além disso, BO é lado comum aos triângulos BPO e BQO, que ainda têm lados PO e QO com comprimentos iguais, pois são ambos raios do semicírculo. Isso garante a congruência entre os triângulos BPO e BQO, pelo caso de congruência LLL. Portanto, $P\widehat{B}O = Q\widehat{B}O$, ou seja, BO é bissetriz interna de $A\widehat{B}C$.

Agora, sendo x a medida de AO, temos que $25 - x$ é a medida de OC. Portanto, pelo teorema da bissetriz interna, $\dfrac{\overline{AO}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{CO}}{\overline{AC}}$. Mas

$$\begin{aligned}\frac{\overline{AO}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CO}}{\overline{AC}} &\Leftrightarrow \frac{x}{12} = \frac{25-x}{18}\\ &\Leftrightarrow 18x = 300 - 12x\\ &\Leftrightarrow 30x = 300 \Leftrightarrow x = 10.\end{aligned}$$

□

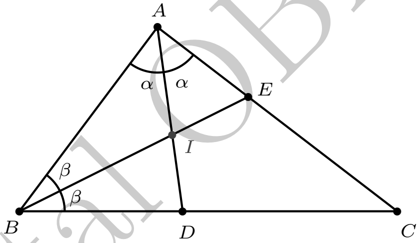
Para o próximo exemplo, recorde que o **incentro** de um triângulo é o ponto de encontro das três bissetrizes internas do mesmo, e que tal ponto equidista dos lados do triângulo; em particular, ele é o centro do **círculo inscrito** no triângulo, ou seja, o círculo contido no triângulo e tangente a seus lados.

Exemplo 2. *Seja ABC um triângulo com lados $\overline{AB} = 3$, $\overline{AC} = 4$ e $\overline{BC} = 5$. Seja, também, D o ponto sobre o lado BC tal que AD é a bissetriz interna do ângulo $\widehat{A}$.*

(a) *Calcule a medida do segmento BD;*

(b) *Se I for o incentro de ABC, calcule a razão em que I divide a bissetriz interna AI.*

Solução. A figura a seguir servirá à análise de ambos os itens pedidos.



(a) Aplicando o teorema da bissetriz interna ao triângulo ABC, temos

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{3}{4}.$$

Aplicando as propriedades de proporções à igualdade acima, podemos repetir os numeradores e, em seguida, somá-los aos denominadores. Assim fazendo, obtemos

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{BD} + \overline{DC}} = \frac{3}{3+4} \Leftrightarrow \frac{\overline{BD}}{5} = \frac{3}{7} \Leftrightarrow \overline{BD} = \frac{15}{7}.$$

(b) Agora, a idéia é perceber que o segmento BI também é bissetriz interna do triângulo ABD, o que nos permite aplicar novamente o teorema da bissetriz interna. Assim fazendo, obtemos

$$\frac{\overline{AI}}{\overline{ID}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{3}{\frac{15}{7}} = \frac{7}{5}.$$

□

Exemplo 3. *A bissetriz interna AD de um triângulo ABC divide o lado oposto em dois segmentos BD e CD, de medidas respectivamente iguais a $24cm$ e $30cm$. Sabendo que AB e AC têm comprimentos respectivamente iguais a $2x + 6$ e $3x$, calcule o valor de x e as medidas de AB e AC.*

Solução. Aplicando uma vez mais o teorema da bissetriz interna (faça uma figura para acompanhar), temos

$$\frac{2x+6}{3x} = \frac{24}{30} = \frac{4}{5}.$$

Multiplicando em $\times$, segue que $5(2x + 6) = 3x \cdot 4$, logo, $12x = 10x + 30$. Então, $x = 15$ e, daí,

$$AB = 2x + 6 = 2 \cdot 15 + 6 = 36$$

e, analogamente, $AC = 45$. □

Exemplo 4. *Calcule a medida do lado AB do triângulo ABC sabendo que:*

(*i*) *a bissetriz interna AD de $\widehat{A}$ determina, sobre o lado BC, o segmento BD de medida $10cm$;*

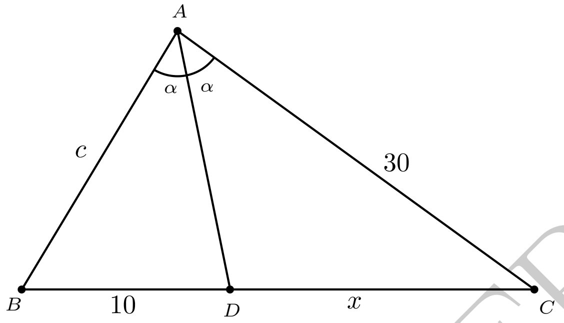
(*ii*) *o lado AC mede $30cm$;*

(*iii*) *o perímetro de ABC é $75cm$.*

Solução. A figura a seguir representa a situação descrita no enunciado.

Aplicando o teorema da bissetriz interna, obtemos $\frac{c}{10} = \frac{30}{x}$ ou, o que é o mesmo, $cx = 300$.

Por outro lado, a medida do perímetro de ABC fornece a igualdade $c + 10 + x + 30 = 75$, de sorte que $c + x = 35$.



Assim, obtiveemos o sistema de equações

$$\begin{cases} c + x = 35 \\ cx = 300 \end{cases}.$$

A primeira equação dá $c = 35 - x$, relação que substituída na segunda equação resulta na equação de segundo grau

$$x^2 - 35x + 300 = 0.$$

Como o discriminante é $\Delta = (-35)^2 - 4 \cdot 300 = 25$, obtemos

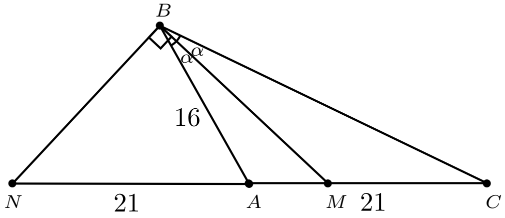
$$x = \frac{35 \pm \sqrt{25}}{2} = 20 \text{ ou } 15.$$

A partir daí, $c = 35 - x = 15$ ou 20.

Por fim, observe que ambos os pares de medidas obtidos para x e c verificam a desigualdade triangular, de modo que, realmente, há duas soluções possíveis. $\square$

Exemplo 5. *Em um triângulo ABC, as bissetrizes interna e externa traçadas a partir do vértice B encontram o lado oposto (ou seu prolongamento) nos pontos M e N, respectivamente. Se $\overline{AC} = 21$, $\overline{AB} = 16$ e $\overline{AN} = 21$, calcule os comprimentos dos segmentos BC e AM.*

Solução. Primeiramente, observe que as igualdades $\overline{AN} = 21$ e $\overline{AC} = 21$ garantem que A é o ponto médio do segmento CN (veja a próxima figura).



Agora, pelo teorema da bissetriz externa, temos

$$\frac{\overline{NA}}{\overline{NC}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{BC}}.$$

Substituindo os valores dados, temos

$$\frac{\overline{NA}}{\overline{NC}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \frac{21}{42} = \frac{16}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \overline{BC} = 32.$$

Por outro lado, pelo teorema da bissetriz interna, temos

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MC}} = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}.$$

Então, aplicando as propriedades de proporções, segue que

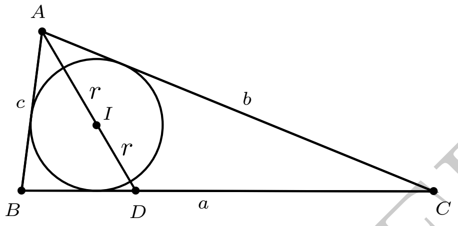
$$\begin{aligned} \frac{\overline{AM}}{\overline{MC}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\overline{AM}}{\overline{AM} + \overline{MC}} &= \frac{1}{1+2} \\ \Leftrightarrow \frac{\overline{AM}}{21} &= \frac{1}{3} \Leftrightarrow \overline{AM} = 7. \end{aligned}$$

$\square$

O próximo (e último) exemplo é um tanto mais elaborado.

Exemplo 6. *Mostre que não existe triângulo no qual o círculo inscrito divida a bissetriz interna de um dos ângulos internos em três segmentos de comprimentos iguais.*

Prova. Considere a figura a seguir como representativa da situação do problema. Argumentando por contradição, suponha que a bissetriz interna AD fique dividida, pelo círculo inscrito, em três segmentos de comprimentos iguais.



Sejam I o incentro de ABC e r o raio do círculo inscrito. Como uma das três partes em que AD fica dividido é o diâmetro do círculo inscrito, que tem comprimento $2r$, concluímos que $\overline{AD} = 3 \cdot 2r = 6r$. Assim, $\overline{AI} = 2r + r = 3r$, logo, $\overline{ID} = 3r$.

Agora, aplicando o teorema da bissetriz interna ao triângulo ABD (com a bissetriz BI), vimos no Exemplo 3 que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AI}}{\overline{ID}} = \frac{3r}{3r} = 1.$$

Se juntarmos esse resultado com o teorema da bissetriz interna aplicado ao triângulo ABC (com bissetriz AD) e utilizarmos propriedades de proporções, obteremos

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AB} + \overline{AC}}{\overline{BD} + \overline{DC}} = \frac{b+c}{a}.$$

Então, as duas relações acima garantem que

$$\frac{b+c}{a} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = 1,$$

de maneira que $b+c = a$. Como isso contradiz a desigualdade triangular, chegamos a uma contradição.

Assim, não é possível que o círculo inscrito divida a bissetriz interna de um dos ângulos internos em três segmentos de comprimentos iguais. $\square$

Dicas para o Professor

O conteúdo dessa última parte pode ser visto em um ou dois encontros de 50 minutos cada, a depender da maturidade da turma. Ao longo da discussão dos exemplos, você deve sempre enfatizar o uso de uma das versões do teorema da bissetriz como ferramenta principal, assim como pode utilizar exemplos mais elaborados (veja as referências).

Os teoremas das bissetrizes interna e externa têm aplicações interessantes à Geometria, sendo um exemplo notável aquele dado pelo *círculo de Apolônio*. Para o leitor interessado, sugerimos a referência [1].

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 2: Geometria Euclidiana Plana*, terceira edição. Rio de Janeiro, Editora SBM, 2024.

2. O. Dolce e J. N. Pompeu. *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 9: Geometria Plana.* São Paulo, Atual Editora, 2013.