Material Teórico - Módulo de MATEMÁTICA FINANCEIRA

Financiamentos

Primeiro Ano do Ensino Médio

Autor: Prof. Francisco Bruno Holanda
Autor: Prof. Antonio Caminha Muniz Neto

20 de agosto de 2018

1 Introdução

Neste material, iremos aplicar os tópicos que aprendemos nos materiais anterior em um tema de extrema importância, não só para aqueles que desejam aprender matemática financeira, mas também para todas as pessoas que contraem dívidas ou realizam financiamentos para a compra de bens de alto custo, como automóveis e imóveis.

Quando compramos uma casa, por exemplo, assinamos um *contrato de hipoteca* com uma *instituição financeira* (um banco, por exemplo). Nesse contrato, fica acordado que a instituição nos emprestará o dinheiro necessário para efetivar a compra do imóvel, em troca de pagamentos periódicos futuros.

Esses pagamentos possuem duas funções: parte deve pagar os juros correspondentes à atualização monetária da dívida e o restante serve para *amortizar*, ou seja, diminuir o saldo devedor original. A estrutura de pagamentos ao longo do tempo recebe o nome de **sistema de amortização.**

Ao longo deste material, abordaremos os dois tipos de sistema de amortização adotados no sistema financeiro brasileiro: o *sistema Price* e o *sistema de amortização constante* (SAC). Porém, existem ainda o sistema americano, o sistema alemão e o sistema misto.

Na próxima seção, introduziremos o conceito de tabela de amortização que é a mesma para todos sistemas de amortização, independentemente de suas características próprias.

2 Tabela de amortização

Considere a situação na qual um indivíduo toma emprestado uma quantia S_0 a uma taxa de juros i, que deve ser paga nos próximos n períodos. O processo de amortização se dará ao final dos períodos de 1 a n, e pode ser descrito nos seguintes itens:

i. O pagamento a ser realizado no período k será denotado por P_k; o saldo devedor imediatamente após o pagamento do período k será denotado por S_k.

ii. Para $k \geq 1$, entre os períodos $k-1$ e k há incidência de J_k juros sobre o saldo devedor S_{k-1}.

iii. Dessa forma, o pagamento P_k deve suficiente para cobrir os juros $J_k = S_{k-1} \cdot i$ da dívida, bem como amortizar parte da dívida original. Essa amortização será denotada por A_k.

iv. Além disso, os pagamentos devem ser tais que o saldo devedor após o último período seja igual a zero.

As informações acima podem ser prontamente resumidas no conjunto de equações (1), as quais são válidas para qualquer sistema de amortização.

$$\begin{aligned} J_k &= S_{k-1} \cdot i; \\ P_k &= J_k + A_k. \\ S_n &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Delas, decorre também a composição do saldo devedor S_{k+1}, descrita a seguir:

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + J_{k+1} - P_{k+1} \\ &= S_k + \cancel{J_{k+1}} - A_{k+1} - \cancel{J_{k+1}} \\ &= S_k - A_{k+1}. \end{aligned}$$

A seguir, apresentamos a chamada **tabela de amortização** (1), que pode ser construída facilmente em Excel de forma recursiva, utilizando as identidades acima.

Tabela 1: tabela de amortização.

Período	Juros	Amortiz.	Pagam.	Saldo Devedor
0				S_0
1	J_1	A_1	P_1	S_1
2	J_2	A_2	P_2	S_2
3	J_3	A_3	P_3	S_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n-1$	J_{n-1}	A_{n-1}	P_{n-1}	S_{n-1}
n	J_n	A_n	P_n	S_n

3 Sistema de amortização constante (SAC)

No sistema de amortização constante, todas as amortizações são iguais, ou seja:

$$A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A.$$

Iterando a recorrência $S_k = S_{k-1} - A_k$, obtemos

$$S_k = S_0 - A_1 - A_2 - \cdots - A_k. \tag{2}$$

Fazendo $k = n$ e utilizando o fato de que $S_n = 0$ e a amortização é constante, temos:

$$0 = S_n = S_0 - (\underbrace{A + A + A + \cdots + A}_{n \text{ vezes}}) = S_0 - nA,$$

de modo que

$$A = \frac{S_0}{n}.$$

Além disso,

$$S_k = S_0 - kA = S_0 - \frac{kS_0}{n} = \frac{S_0(n-k)}{n}.$$

Consequentemente,

$$J_k = S_{k-1} \cdot i = \frac{S_0(n-(k-1))i}{n} = \frac{S_0(n-k+1)i}{n}$$

e

$$\begin{aligned} P_k &= J_k + A_k \\ &= \frac{S_0(n-k+1)i}{n} + \frac{S_0}{n} \\ &= \frac{S_0(ni+1)}{n} - (k-1)\frac{S_0 i}{n}. \end{aligned}$$

Em particular, veja que os valores dos pagamentos são decrescentes ao longo do tempo e que são termos de uma progressão aritmética.

Vejamos o sistema SAC em ação nos dois exemplos a seguir.

Exemplo 1. *Geovana contratou um empréstimo de* 1.000 *reais pelo SAC a uma taxa de juros de* 3% *ao mês. Ela irá realizar o pagamento em quatro parcelas mensais. Faça a tabela de amortização e diga qual é o valor da última prestação.*

Solução. No primeiro período o empréstimo é feito, gerando um saldo devedor de $S_0 = 1.000$, porém não há pagamento nesse mês. Sabemos que no SAC as amortizações são constantes. Sendo assim, cada amortização é igual a $A = \frac{1000}{4} = 250$. Veja que a taxa de juros é de 3% ao mês, gerando um total de $J_1 = \frac{3}{100} \cdot 1.000 = 30$ reais em juros no primeiro período. Assim, se o saldo devedor ao final do período 1 é $S_1 = 1000 - 250 = 750$, o valor do pagamento será $P_1 = 250 + 30 = 280$.

Período	Juros	Amort.	Pagam.	Saldo Dev.
0				1000
1	30	250	280	750

Continuando para o segundo período, os juros serão de $J_2 = 3\% \cdot 750 = 22,50$ e o pagamento será de $P_2 = 250 + 22,50 = 272,50$. Temos, então, a tabela a seguir:

Período	Juros	Amort.	Pagam.	Saldo Dev.
0				1000
1	30	250	280	750
2	22, 50	250	272, 50	500

Por fim, para os últimos dois períodos, temos sucessivamente $J_3 = 3\% \cdot 500 = 15$ e $P_3 = 250 + 15 = 265$; $J_4 = 3\% \cdot 250 = 7,50$ e o pagamento será de $P_4 = 250 + 7,50 = 257,50$. A tabela de amortização completa é como a seguir:

Período	Juros	Amort.	Pagam.	Saldo Dev.
0				1000
1	30	250	280	750
2	22, 50	250	272, 50	500
3	15	250	265	250
4	7, 50	250	257, 50	0

□

Exemplo 2. *Na Figura 1, apresentamos gráficos que mostram como os valores de juros, amortizações, pagamentos e saldos devedores se comportam ao longo do tempo no sistema SAC. Tais gráficos são relativos a um empréstimo no valor de $S_0 = 200.000$, financiado em $n = 360$ meses a uma taxa de $i = 1\%$ ao mês. Como exercício, sugerimos ao leitor escrever as primeiras linhas da tabela de amortização correspondente a essa situação, a fim de convencer-se de que os formatos dos gráficos são os apresentados.*

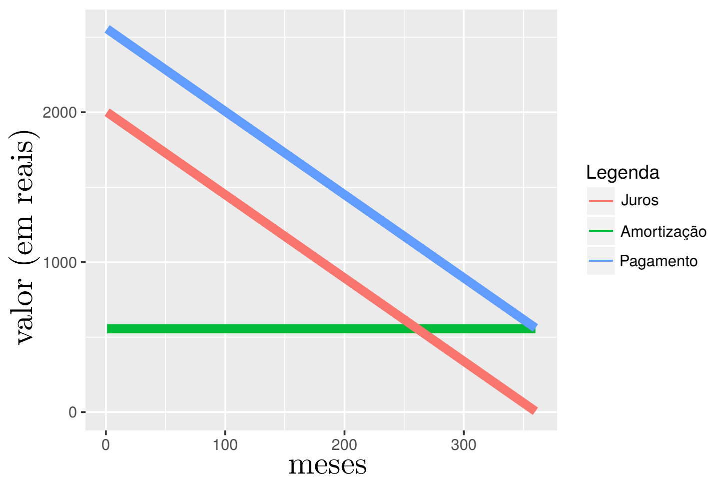

Figura 1: gráfico da tabela SAC.

4 Sistema Price

O sistema Price, também é chamado de sistema francês de amortização, recebe este nome em homenagem a Richard Price, que o apresentou pela primeira vez em 1771 no seu livro "Observações sobre Pagamentos Remissivos".

No sistema Price de amortização, o valor da parcela é constante. Além disso, sendo i a taxa mensal de juros, n o número de períodos e S_0 o saldo devedor inicial, o valor P dos pagamentos é dado pela relação

$$P = \frac{S_0 i}{1-(1+i)^{-n}}. \tag{3}$$

O número $\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$ é chamado de **fator de recuperação de capital**.

Antes de nos debruçarmos sobre o problema geral do cálculo de juros, amortizações e saldos devedores no sistema Price, examinemos o seguinte

Exemplo 3. *Marcos deseja comprar um carro no valor de* 20.000 *reais e achou um banco que aceitou financiar este* *valor pelo sistema Price, cobrando uma taxa de $2,5\%$ ao mês. Calcule o valor da prestação nos seguintes casos:*

a) $n = 24$ *meses.*

b) $n = 48$ *meses.*

Solução. Para encontrarmos o valor do pagamento mensal, basta aplicarmos os valores $S_0 = 20.000$ e $i = 2,5\%$, juntamente com o respectivo valor de n, na relação (3). Com o auxílio de uma calculadora ou computador, obtemos

a) $P = \dfrac{20000 \cdot 0,025}{1-(1+0,025)^{-24}} \cong 1.118,25.$

b) $P = \dfrac{20000 \cdot 0,025}{1-(1+0,025)^{-48}} = 720,11.$

□

Ainda em relação ao exemplo anterior, veja que, ao dobrarmos o tempo do financiamento (de 24 para 48 meses), o valor do pagamento mensal não diminui pela metade, mesmo que mantenhamos a taxa de juros (2,5%). Isto se deve ao fato de um financiamento mais longo estar relacionado a um pagamento total de juros maior. Intuitivamente, isso ocorre porque passa-se mais tempo pagando juros ao banco.

Para calcular os valores dos juros, amortizações e saldos devedores no sistema Price, partimos da última identidade das amortizações: $S_{k+1} = S_k + J_{k+1} - P_{k+1}$. Como $J_{k+1} = S_k \cdot i$ e $P_{k+1} = P$, temos $S_{k+1} = S_k(1+i) - P$. Reescrevendo essa última relação com $k-1$ no lugar de k, obtemos o par de equações:

$$S_{k+1} = S_k(1+i) - P$$
$$S_k = S_{k-1}(1+i) - P$$

Subtraindo uma da outra membro a membro, encontramos

$$S_{k+1} - S_k = (S_k - S_{k-1})(1+i),$$

ou seja (novamente da última identidade das amortizações)

$$A_{k+1} = A_k(1+i).$$

Então, percebemos que a sequência $(A_k)_{k\geq 1}$ é uma progressão geométrica (PG) de razão $1+i$. Como $A_1 = P - S_0 i$, temos que

$$A_k = A_1(1+i)^{k-1} = (P - S_0 i)(1+i)^{k-1}.$$

Utilizando novamente (2) (que, coforme vimos, é válida para qualquer sistema de amortização), juntamente com a fórmula para a soma dos termos de uma PG, obtemos

$$\begin{aligned} S_k &= S_0 - (A_1 + A_2 + \cdots + A_k) \\ &= S_0 - \frac{A_k(1+i) - A_1}{(1+i)-1} \\ &= S_0 - \frac{A_1(1+i)^k - A_1}{i} \\ &= S_0 - \frac{(P - S_0 i)((1+i)^k - 1)}{i}. \end{aligned}$$

Por fim, uma vez que $J_k = S_{k-1} \cdot i$, segue do que fizemos acima que

$$J_k = S_0 i - (P - S_0 i)((1+i)^{k-1} - 1).$$

Exemplo 4. *Geovana contratou um empréstimo de* 1.000 *reais pelo sistema Price a uma taxa de juros de* 3% *ao mês. Ela irá realizar o pagamento em quatro parcelas mensais. Faça a tabela de amortização e diga qual é o valor da última prestação.*

Solução. No primeiro período o empréstimo é feito, gerando um saldo devedor de $S_0 = 1.000$, porém não há pagamento neste mês. Sabemos que no sistema Price os pagamentos são constantes. Neste caso, segue de (3) que cada pagamento é igual a

$$P = \frac{1.000 \cdot 0,03}{1-(1+0,03)^{-4}} \cong 269,03.$$

Veja que a taxa de juros é de 3% ao mês, gerando um total de $J_1 = \frac{3}{100} \cdot 1.000 = 30$ reais em juros no primeiro período. Assim, a amortização do primeiro período será $A_1 = 269,02 - 30 = 239,02$ e o saldo devedor será $S_1 = 1000 - 239,02 = 760,98$. Obtemos, portanto, as duas primeiras linhas da tabela de amortização:

Período	Juros	Amort.	Pagam.	Saldo Dev.
0				1000
1	30	239,03	269,03	760,98

Continuando para o segundo período, os juros serão de $J_2 = 3\% \cdot 760,98 = 22,83$, enquanto a amortização será de $A_2 = P_2 - J_2 = 269,03 - 22,83 = 246,20$ e o saldo devedor de $S_2 = S_1 - A_2 = 760,98 - 246,20$. A tabela de amortização ganha sua terceira linha:

Período	Juros	Amort.	Pagam.	Saldo Dev.
0				1000
1	30	239,03	269,03	760,98
2	22,83	246,20	269,03	514,78

Por fim, para o terceiro período, temos $J_3 = 3\% \cdot 514,78 = 15,44$, com amortização $A_3 = 269,03 - 15,44 = 253,59$ e saldo devedor será $S_3 = S_2 - A_3 = 524,78 - 253,59 = 261,19$; para o quarto e último período, temos $J_4 = 3\% \cdot 261,19 = 7,83$, $A_4 = 269,03 - 7,83 = 261,20$ e $S_4 = S_3 - A_4 = 261,19 - 261,20 = -0,01$.

Observação: o valor residual $S_4 = -0,01$ ocorre apenas devido às aproximações que fizemos ao longo da construção da tabela. Na prática, esses erros residuais são incorporados à última parcela.

□

Período	Juros	Amort.	Pagam.	Saldo Dev.
0				1000
1	30	$239,03$	$269,03$	$760,98$
2	$22,83$	$246,20$	$269,03$	$514,78$
3	$15,44$	$253,59$	$269,03$	$271,19$
4	$7,83$	$261,20$	$269,03$	$-0,01$

Exemplo 5. *Na Figura 2, apresentamos os gráficos que mostram como os valores de juros, amortizações, pagamentos e saldos devedores se comportam ao longo do tempo no sistema Price. Tais gráficos são relativos a um empréstimo no valor de* $S_0 = 200.000$*, financiado em* $n = 360$ *meses a uma taxa de* $i = 1\%$ *ao mês. Como exercício, sugerimos ao leitor escrever as primeiras linhas da tabela de amortização correspondente a essa situação, a fim de convencer-se de que os formatos dos gráficos são os mostrados.*

Compare essa figura com a Figura 1. Veja que o valor do pagamento é inicialmente maior na tabela SAC em detrimento da tabela Price, mas que este valor vai diminuindo ao longo do tempo e que eventualmente torna-se menor do que o pagamento fixo da tabela Price.

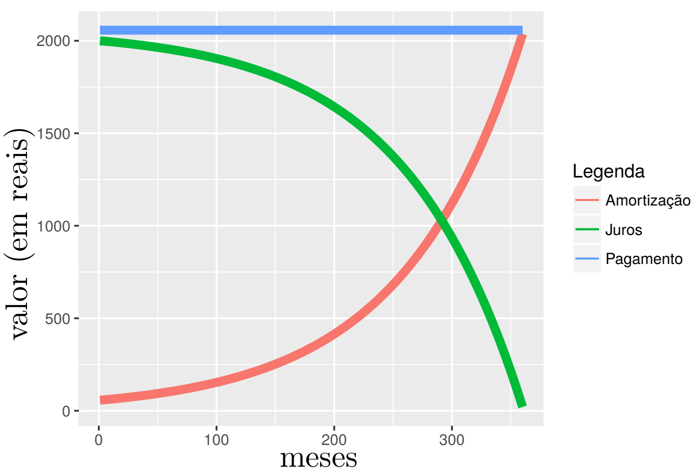

Figura 2: gráfico da tabela Price.

Sugestões ao Professor

Recomenda-se que o professor utilize pelo menos dois encontros de 100 minutos cada para apresentar o conteúdo presente neste material. No primeiro encontro, ensine os princípios básicos do sistema SAC e resolva os exercícios. Se possível, preencha as tabelas de amortização utilizando algum software para criação de planilhas; faça isso passo a passo, sem pressa. No segundo encontro, repita a mesma metodologia para o sistema Price.

Um dica interessante é recriar os gráficos presentes neste material (e outros semelhantes) utilizando o Geogebra ou até mesmo os softwares de planilhas. É possível encontrar mais exercícios sobre amortizações nos livros recomendados na bibliografia.

Referências

[1] A. ASSAF NETO. *Matemática Financeira e suas Aplicações.* Atlas, 2008.

[2] A. BRUNI and R. FAMA. *Matemática Financeira com HP 12C e Excel.* Atlas, 2008.

[3] J. M. GOMES and W. F. MATHIAS. *Matemática Financeira.* Atlas, 2009.

[4] Augusto C. Morgado, Eduardo Wagner, and Sheila C. Zani. *Progressões e Matemática Financeira.* SBM, 2015.