Material Teórico - Módulo de Introdução ao Cálculo - Derivada como Função

Exercícios - Parte I

Tópicos Adicionais

Autor: Tiago Caúla Ribeiro
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

08 de Dezembro de 2023

Portal da Matemática
OBMEP

Nesta aula e na próxima, apresentaremos vários exemplos relacionados ao material estudado nesse módulo. Aqui, exploraremos exemplos envolvendo derivadas e monotonicidade de funções.

Exemplo 1. *Calcule, com justificativa, o número de soluções reais da equação* $\log x = (x-1)^2$.

Solução. Para $0 < x < 1$, temos $\log x < 0 < (x-1)^2$, logo, não há soluções em (0,1). Por outro lado, se $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ for dada por $f(x) = (x-1)^2 - \log x$, então $f'(x) = 2(x-1) - \frac{1}{x}$, de sorte que

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x^2 - x - \frac{1}{2} < 0 \Leftrightarrow 1 \leq x < \frac{1+\sqrt{3}}{2},$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

e

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1+\sqrt{3}}{2}.$$

Portanto, f decresce em $\left[1, \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$ e cresce em $\left[\frac{1+\sqrt{3}}{2}, +\infty\right)$, de forma que tem um mínimo absoluto em $x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

Uma vez que $f(1) = 0$, temos $f\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) < 0$. Como $f(e) = (e-1)^2 - \log e > (1{,}7)^2 - 1 > 0$, o TVI garante a existência de uma solução adicional $x = a$ da equação dada, com $\frac{1+\sqrt{3}}{2} < a < e$. □

Exemplo 2. *Se P é um polinômio com coeficiente líder positivo, mostre que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = P(x)/e^x$, é decrescente em algum intervalo da forma $[a, +\infty)$.*

Solução. Digamos que P tenha grau n e $a_n > 0$ seja seu coeficiente líder.

Se P for constante (ou seja, $n = 0$ e $P \equiv a_0$), o resultado segue, pois $f(x) = a_0/e^x$ e, nesse caso, f é decrescente (já que a função exponencial $x \mapsto e^x$ é positiva e crescente). Podemos, portanto, supor que $n \geq 1$.

Pela regra do quociente,

$$f'(x) = \frac{P'(x)e^x - P(x)e^x}{e^{2x}} = \frac{P'(x) - P(x)}{e^x}. \qquad (1)$$

Como o coeficiente líder do polinômio $P' - P$, a saber, $-a_n$, é negativo, vale o limite abaixo:

$$\lim_{x \to +\infty} [P'(x) - P(x)] = -\infty.$$

Em particular, $P'(x) - P(x)$ é negativo para todo x suficientemente grande, digamos, para todo $x \geq a$, para um certo número real a. Por (1), segue que f' é negativa em $[a, +\infty)$, de forma que f é decrescente nesse mesmo intervalo (confira o teorema 15 da 1ª parte da aula anterior). $\square$

Exemplo 3. *Se P for um polinômio, prove que*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{e^x} = 0. \qquad (2)$$

Solução 1. Como $e^x \to +\infty$ quando $x \to +\infty$, podemos supor P não constante. Mais ainda, não há perda de generalidade em assumir que o coeficiente líder de P é positivo. Desse modo,

$$\lim_{x \to +\infty} P(x) = +\infty,$$

de sorte que, pelo exemplo anterior, a regra $x \mapsto P(x)/e^x$ define uma função positiva e decrescente em algum intervalo $[a, +\infty)$. Assim, existe

$$L = \lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{e^x}. \qquad (3)$$

Repetindo o argumento para o polinômio $P(x)^2$, conclui-se a existência de

$$M = \lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)^2}{e^x}. \qquad (4)$$

Portanto, as relações (3) e (4) permitem escrever

$$\begin{aligned} L^2 &= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{P(x)}{e^x}\right]^2 = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{P(x)^2}{e^x}\cdot\frac{1}{e^x}\right] \\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{P(x)^2}{e^x}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x} = M\cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

de onde segue que $L = 0$, ou seja,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{P(x)}{e^x} = 0.$$

$\square$

Solução 2. De acordo com o exemplo 12 da parte 1 da aula anterior, vale $\ln u < u$, qualquer que seja o real positivo u. Tomando $u = e^y$, conclui-se que $y < e^y$, para todo real y. Fixado um inteiro não negativo k, tomamos $y = x/(k+1)$ na desigualdade anterior para ter $\frac{x}{k+1} < e^{x/(k+1)}$ e, daí,

$$\frac{x^{k+1}}{(k+1)^{k+1}} < e^x,$$

qualquer que seja $x > 0$. Portanto,

$$0 < \frac{x^k}{e^x} < \frac{(k+1)^{k+1}}{x} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{x^k}{e^x} = 0.$$

Sendo assim, dado um polinômio $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$, temos

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty}\frac{P(x)}{e^x} &= \lim_{x\to+\infty}\sum_{k=0}^n a_k\frac{x^k}{e^x} = \sum_{k=0}^n a_k\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{x^k}{e^x} \\ &= \sum_{k=0}^n a_k\cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

$\square$

Fazendo $P(y) = y$ na igualdade (2), vem que $y/e^y \to 0$ se $y \to +\infty$. Logo, a substituição $y = \log x$ no limite anterior permite escrever

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x} = 0, \tag{5}$$

relação que será utilizada na 2ª solução do

Exemplo 4 (Olimp. Croata). *Prove que não existe uma função polinomial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \log x$, para todo $x > 0$.*

Solução 1. Por contradição, suponha que existisse uma tal função polinomial f. Então, f não é constante e, derivando a igualdade $f(x) = \log x$, obteríamos $f'(x) = \frac{1}{x}$, logo, $xf'(x) - 1 = 0$, para todo $x > 0$. Mas, como f' é polinomial, teríamos $x \mapsto xf'(x) - 1$ polinomial e não constante, o que é um absurdo. $\square$

Solução 2. Primeiro vale observar que, se f é uma função polinomial não constante de grau n, então existe

$$L = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x},$$

com $L \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, se $n = 1$, ou $L = \pm\infty$ caso seja $n > 1$ (exercício!). Esse fato impede, de acordo com a relação (5), qualquer igualdade $f = \log$ em $(0, +\infty)$, sendo f uma função polinomial. $\square$

Considere n números reais positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Para cada $1 \leq k \leq n$, sejam A_k e G_k as médias aritmética e geométrica dos k números $a_1, \ldots, a_k$.

Exemplo 5. *Nas notações acima, vale a desigualdade*

$$A_n - G_n \geq \frac{n-1}{n}(A_{n-1} - G_{n-1}), \tag{6}$$

com igualdade se, e só se, $a_n = G_{n-1}$.

Solução. Seja $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{x}{n} - (G_{n-1})^{\frac{n-1}{n}} x^{\frac{1}{n}} + \frac{n-1}{n} A_{n-1}.$$

Então, f é derivável e

$$f'(x) = \frac{1}{n}\left[1 - \left(\frac{G_{n-1}}{x}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right],$$

para cada $x > 0$. Daí, seguem imediatamente as relações

$$f'(x)\begin{cases} < 0, \text{se } x < G_{n-1} \\ > 0, \text{se } x > G_{n-1} \end{cases},$$

de modo que $x = G_{n-1}$ é ponto de mínimo estrito de f. Observando que

$$\begin{aligned} f(G_{n-1}) &= \frac{G_{n-1}}{n} - G_{n-1} + \frac{n-1}{n}A_{n-1} \\ &= \frac{n-1}{n}(A_{n-1} - G_{n-1}) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f(a_n) &= \frac{a_n}{n} - (G_{n-1})^{\frac{n-1}{n}} a_n^{\frac{1}{n}} + \frac{n-1}{n}A_{n-1} \\ &= \frac{(n-1)A_{n-1} + a_n}{n} - (G_{n-1}^{n-1}a_n)^{\frac{1}{n}} \\ &= A_n - G_n, \end{aligned}$$

é válido concluir que

$$A_n - G_n = f(a_n) \geq f(G_{n-1}) = \frac{n-1}{n}(A_{n-1} - G_{n-1}),$$

com igualdade se, e só se, $a_n = G_{n-1}$.

$\square$

Observação 6. *A relação* (6) *permite apresentar uma outra demonstração da desiguadade entre as médias aritmética e geométrica. Com efeito, nas notações acima, temos*

$$\begin{aligned} n(A_n - G_n) &\geq (n-1)(A_{n-1} - G_{n-1}) \\ &\geq (n-2)(A_{n-2} - G_{n-2}) \\ &\vdots \\ &\geq 1(A_1 - G_1) = 0, \end{aligned}$$

de sorte que $G_n \leq A_n$. Além disso, para que a igualdade ocorra, é necessário e suficiente que cada uma das desigualdades acima seja uma igualdade. Pelo exemplo anterior, isso ocorre se, e somente se, $a_2 = G_1, a_3 = G_2, \ldots, a_n = G_{n-1}$. Como o leitor pode verificar, essas igualdades equivalem a $a_1 = \ldots = a_n$. Por exemplo,

$$a_2 = G_1 \Rightarrow a_2 = a_1;$$

$$a_3 = G_2 \text{ e } a_1 = a_2 \Rightarrow a_3 = \sqrt{a_2^2} = a_2 \Rightarrow a_1 = a_2 = a_3;$$
$$\cdots\cdots\cdots ;$$
$$a_2 = G_1, a_3 = G_2, \ldots, a_n = G_{n-1} \Rightarrow a_1 = \ldots = a_n.$$

Exemplo 7. *Sejam α e β as medidas dos ângulos de vértices A e B de um triângulo ABC. Se existirem inteiros positivos k e l tais que*

$$\operatorname{sen}^k \alpha \cos^l \beta = \operatorname{sen}^k \beta \cos^l \alpha, \tag{7}$$

calcule a razão $\overline{AC}/\overline{CB}$.

Solução. Observando que $0 < \theta < \pi \Rightarrow \operatorname{sen}\theta > 0$ e que $|\cos\theta| = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta}$, para cada arco θ, a equação (7) implica

$$\frac{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\beta}^{\,l}}{\operatorname{sen}^k \beta} = \frac{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\alpha}^{\,l}}{\operatorname{sen}^k \alpha},$$

igualdade equivalente a

$$\frac{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\beta}}{\sqrt[l]{\operatorname{sen}\beta}^{\,k}} = \frac{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\alpha}}{\sqrt[l]{\operatorname{sen}\alpha}^{\,k}}$$

ou, ainda,

$$\frac{1 - \operatorname{sen}^2\beta}{\sqrt[l]{\operatorname{sen}^2\beta}^{\,k}} = \frac{1 - \operatorname{sen}^2\alpha}{\sqrt[l]{\operatorname{sen}^2\alpha}^{\,k}}.$$

Tomando $x = \sqrt[l]{\operatorname{sen}^2\alpha}$ e $y = \sqrt[l]{\operatorname{sen}^2\beta}$, temos $x^l = \operatorname{sen}^2\alpha$, $y^l = \operatorname{sen}^2\beta$ e a igualdade anterior pode ser reescrita como

$$\frac{1 - y^l}{y^k} = \frac{1 - x^l}{x^k}.$$

Isso sugere que definamos a função $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \frac{1 - x^l}{x^k}$$

e analisemos sua injetividade. Na verdade, mostraremos que f é decrescente, uma consequência da desigualdade $f'(x) < 0$, para cada $0 < x \leq 1$, como veremos agora:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-lx^{l-1} \cdot x^k - k(1 - x^l)x^{k-1}}{x^{2k}} \\ &= \frac{-[k(1 - x^l) + lx^l]x^{k-1}}{x^{2k}} \\ &= -\frac{k(1 - x^l) + lx^l}{x^{k+1}} < 0, \end{aligned}$$

para todo $x \in (0,1]$.

Portanto, de acordo com os cálculos acima, a equação (7) acarreta $f(\sqrt[l]{\operatorname{sen}^2 \alpha}) = f(\sqrt[l]{\operatorname{sen}^2 \beta})$ e, então, $\sqrt[l]{\operatorname{sen}^2 \alpha} = \sqrt[l]{\operatorname{sen}^2 \beta}$. Assim,

$$\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} \beta.$$

Como α e β não podem ser suplementares (pois são ângulos de um triângulo), a última igualdade implica $\alpha = \beta$, de sorte que ABC é isósceles de base AB. Assim, $\overline{AC}/\overline{CB} = 1$. $\square$

Exemplo 8. *Para cada real $p > 1$, calcule o menor valor possível da soma $x + y$, onde x e y são reais tais que*

$$(x + \sqrt{1 + x^2})(y + \sqrt{1 + y^2}) = p.$$

Prova. Inicialmente, note que

$$y + \sqrt{1 + y^2} = \frac{p}{x + \sqrt{1 + x^2}} = p(\sqrt{1 + x^2} - x),$$

logo,

$$\sqrt{1 + y^2} - y = \frac{1}{y + \sqrt{1 + y^2}} = \frac{1}{p}(x + \sqrt{1 + x^2}).$$

Subtraindo membro a membro as relações acima, ficamos com

$$y = \frac{1}{2}\left(p(\sqrt{1+x^2}-x) - \frac{1}{p}(\sqrt{1+x^2}+x)\right).$$

Agora, seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a função dada por $f(x) = x + y$, em que y é dado, em função de x, como acima. Temos

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + y'(x) \\ &= 1 + \frac{1}{2}\left(p\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - 1\right) - \frac{1}{p}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + 1\right)\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2}\left(p - \frac{1}{p}\right)\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{2}\left(p + \frac{1}{p}\right), \end{aligned}$$

de sorte que

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\frac{1}{2}\left(p+\frac{1}{p}\right)-1}{\frac{1}{2}\left(p-\frac{1}{p}\right)} = \frac{p-1}{p+1}.$$

Um pouco de álgebra elementar dá que

$$\begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{p-1}{p+1} &\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{p} - \frac{1}{\sqrt{p}}\right) \\ &\Leftrightarrow \sqrt{1+x^2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{p} + \frac{1}{\sqrt{p}}\right). \end{aligned}$$

Em particular,

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{p} - \frac{1}{\sqrt{p}}\right).$$

Por outro lado, a última expressão acima para $f'(x)$, juntamente com o fato de que $p - \frac{1}{p} > 0$ (pois $p > 1$) e $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ é uma função crescente para $x > 0$ (pois $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1/x^2+1}}$), garantem que

$$f'(x)\begin{cases} < 0 \text{ para } 0 < x < \frac{1}{2}\left(\sqrt{p} - \frac{1}{\sqrt{p}}\right) \\ > 0 \text{ para } x > \frac{1}{2}\left(\sqrt{p} - \frac{1}{\sqrt{p}}\right). \end{cases}$$

Portanto, f assume seu mínimo global em $x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{p} - \frac{1}{\sqrt{p}}\right)$. Por fim, para esse valor de x, um pouco mais de álgebra elementar fornece

$$f\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{p} - \frac{1}{\sqrt{p}}\right)\right) = \sqrt{p} - \frac{1}{\sqrt{p}}.$$

$\square$

Dicas para o Professor

Para mais problemas similares aos tratados aqui, consulte as referências abaixo. Os exemplos 1, 4 e 8 foram retirados de [1].

Uma ou duas sessões de 50min devem ser suficientes para expor o conteúdo desse material.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, vol. 3. Introdução à Análise.* 2ª ed. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

2. A. Caminha. *Desigualdades Elementares.* Revista Eureka! nº 5, 1999.

3. R. B. Manfrino. et al. *Inequalities. A Mathematical Olympiad Approach.* Birkhäuser, 2009.