Material Teórico - Módulo Probabilidade Condicional

Probabilidade Condicional - Parte 1

Segundo Ano do Ensino Médio

Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Probabilidade Condicional

O conceito de probabilidade condicional é de fundamental importância dentro do estudo da teoria das probabilidades. Dado um experimento aleatório e dois eventos dele, digamos A e B, queremos atribuir um valor para a probabilidade do evento A acontecer considerando que já temos a certeza de que o evento B acontece. Vamos começar com um exemplo.

Exemplo 1. *A tabela abaixo indica as quantidades de médicos de duas especialidades, alergistas e dermatologistas, em uma certa região, agrupados também de acordo com suas nacionalidades.*

	Alergistas	*Dermatologistas*	*Total*
Brasileiros	*50*	*70*	*120*
Cubanos	*60*	*40*	*100*
Total	*110*	*110*	*220*

Escolhendo-se ao acaso um médico desse grupo qual a probabilidade dele ser:

(a) Dermatologista?

(b) Dermatologista, sabendo que é cubano?

(c) Cubano, na certeza de que é dermatologista?

(d) Alergista, dado que é brasileiro?

Solução.

(a) O número de dermatologistas é 110. Como o total de médicos é 220, a probabilidade de que um deles, escolhido ao acaso (de forma uniforme), seja dermatologistas é igual a $\frac{110}{220} = 50\%$.

(b) Sabendo que o médico é cubano, podemos reduzir o nosso espaço amostral para o universo dos médicos cubanos, que são 100. Dentre esses, há 40 dermatologistas. Logo, a probabilidade desejada é igual a $\frac{40}{100} = 40\%$.

(c) O total de dermatologistas é 110, dentre os quais 40 são cubanos. A probabilidade de que, ao sortearmos um desses 110 médicos, ele seja cubano é igual a $\frac{40}{110} \cong 36,4\%$.

(d) O total de médicos brasileiros é 120, dentre os quais 50 são alergistas. Logo, a chance de escolhermos um alergista dentre os brasileiros é $\frac{50}{120} \cong 41,7\%$.

□

As expressões que usamos nos itens (b)-(d), 'sabendo que B', 'na certeza de que B' e 'dado que B', possuem o mesmo significado e indicam que a probabilidade desejada está *condicionada* à ocorrência do evento B.

Agora, vamos considerar um exemplo mais geral. Sejam A e B eventos quaisquer de um espaço amostral Ω, com $B \neq \emptyset$, e sorteemos um elemento $\omega \in \Omega$. Queremos calcular a probabilidade de que ω esteja em A, já sabendo que ω pertence a B.

Observando as soluções dos itens (b)-(d) do exemplo anterior, percebemos que só precisamos nos preocupar com os $|B|$ elementos de B, e que os sorteios que nos interessam são aqueles nos quais $\omega \in A \cap B$. De outra forma, uma vez que já sabemos que $\omega \in B$, o conjunto B passa a funcionar como nosso espaço amostral; também, nesse novo espaço amostral, $A \cap B$ é o evento cuja probabilidade queremos calcular. Portanto, a probabilidade desejada é $|A \cap B|/|B|$. Por outro lado, como $\Pr(A \cap B) = |A \cap B|/|\Omega|$ e $\Pr(B) = |B|/|\Omega|$, temos

$$\frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)}.$$

Em vista dos cálculos acima, temos a seguinte definição.

Se A e B são eventos de um espaço de probabilidade Ω, com $P(B) \neq 0$, a *probabilidade do evento A condicionada à ocorrência do evento B*, denotada por $\Pr(A \mid B)$, é definida como:

$$\Pr(A \mid B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)}. \qquad (1)$$

A expressão $\Pr(A \mid B)$ também pode ser lida como: "probabilidade de A, dado B", ou "probabilidade de A, na certeza de B." No caso em que $\Pr(B) = 0$, é comum definirmos $\Pr(A \mid B)$ como sendo igual a $\Pr(A)$.

A equação (1) implica que

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(B)\Pr(A \mid B). \qquad (2)$$

Veja que esta última igualdade é valida mesmo no caso em que $\Pr(B) = 0$. De fato, como $B = (A \cap B) \cup (B - A)$ (união disjunta), temos

$$P(B) = P(A \cap B) + P(B - A) \geq P(A \cap B).$$

Portanto, se $\Pr(B) = 0$, então $\Pr(A \cap B) = 0$ também. Por fim, invertendo os papéis de A e B na equação (2) e observando que $A \cap B = B \cap A$, também podemos escrever

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A)\Pr(B \mid A). \qquad (3)$$

As expressões acima nos dão uma maneira bastante útil de encontrar o valor da probabilidade da interseção dos eventos A e B, desde que consigamos encontrar os valores de $\Pr(A)$ e $\Pr(B \mid A)$ (ou aqueles de $\Pr(B)$ e $\Pr(A \mid B)$). Isto é uma alternativa ao uso da fórmula $\Pr(A \cap B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cup B)$ que vimos na aula passada.

Vejamos mais um exemplo.

Exemplo 2. *Considere uma urna com* 20 *bolas, sendo* 12 *pretas e* 8 *brancas, de onde iremos retirar duas bolas. Encontre a probabilidade de:*

(a) Ambas serem pretas, se houver reposição.

(b) Ambas serem pretas, se não houver reposição.

(c) Ambas serem da mesma cor, se não houver reposição.

(d) Elas serem de cores diferentes, se não houver reposição.

Solução. Façamos cada item.

(a) O fato da retirada ser feita com reposição indica que, após a primeira bola ser retirada, ela é reposta, ou seja, recolocada dentro da urna. Dessa forma, a segunda bola retirada pode ser qualquer uma das 20 bolas originais. Se A é o evento "a primeira bola é preta", temos claramente que $\Pr(A) = 12/20$. Por outro lado, seja B o evento "a segunda bola é preta". Uma vez que houve reposição, saber que a primeira bola é preta não nós fornece qualquer informação extra sobre as chances da segunda ser preta. Sendo assim, $\Pr(B \mid A) = \Pr(B) = 12/20$ e, daí,

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A)\Pr(B \mid A) = \frac{12}{20} \cdot \frac{12}{20} = \frac{36}{100}.$$

(b) Se A e B são definidos como no item anterior, ainda temos $\Pr(A) = 12/20$. Contudo, como não há reposição, temos apenas 19 possíveis candidatas para a segunda bola. Por outro lado, como queremos calcular a probabilidade de ambas as bolas serem pretas, então implicitamente temos a informação de que A ocorre, ou seja, de que a primeira bola retirada foi preta. Assim, apenas 11 das 19 bolas restantes são pretas, e o valor de $\Pr(B \mid A)$ é $11/19$. Portanto:

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A)\Pr(B \mid A) = \frac{12}{20} \cdot \frac{11}{19} = \frac{33}{95}.$$

(c) Para que as duas bolas sejam da mesma cor, temos que ambas são brancas ou ambas são pretas. A probabilidade do evento de que ambas sejam pretas foi calculada no item anterior. De forma, análoga, a probabilidade de que ambas sejam brancas é igual a $\frac{8}{20} \cdot \frac{7}{19} = \frac{14}{95}$. Como esses dois eventos são disjuntos, temos que a probabilidade desejada é igual a

$$\frac{33}{95} + \frac{14}{95} = \frac{47}{95}.$$

(d) Este evento é o complementar do evento do item anterior. Logo, sua probabilidade é $1 - \frac{47}{95} = \frac{48}{95}$. Outra maneira de obter esse resultado, agora utilizando o conceito de probabilidade condicional, é considerar inicialmente o caso em que a primeira bola seja preta e a segunda seja branca e, em seguida, o caso em que a primeira seja branca e a segunda seja preta. Raciocinando como nos dois itens anteriores, concluímos que o resultado é:

$$\frac{12}{20} \cdot \frac{8}{19} + \frac{8}{20} \cdot \frac{12}{19} = \frac{48}{95}.$$

□

É preciso ter muito cuidado para não confundir as probabilidades condicionais $\Pr(A \mid B)$ e $\Pr(B \mid A)$. Essas quantidade possuem interpretações diferentes e, em geral, seus valores são distintos. De fato, pelas equações (2) e (3), temos que

$$\Pr(A)\Pr(B \mid A) \;=\; \Pr(B)\Pr(A \mid B). \qquad (4)$$

Assim, *no caso em que tais valores são não nulos*, a igualdade acima garante que $\Pr(A \mid B)$ será igual a $\Pr(A \mid B)$ se, e só se, $\Pr(A)$ for igual a $\Pr(B)$. A equação (4) equivale ao chamado *Teorema de Bayes* e pode ser usada em cálculos onde é preciso "inverter" os papéis de A e B (veja, por exemplo, a solução 2 do Exemplo 8).

2 Eventos independentes

Em geral, é possível que o valor de $\Pr(A \mid B)$ seja tanto maior, igual ou menor que $\Pr(A)$. Dizemos que o evento A é **independente** de B quando valer que $\Pr(A \mid B) = \Pr(A)$. Intuitivamente, isso significa que nossa estimativa para a chance de A acontecer não é afetada caso ganhemos a informação de que B acontece.

Suponha que $\Pr(A \cap B) \neq 0$. Novamente pelas equações (2) e (3), veja que se vale $\Pr(A \mid B) = \Pr(A)$, então também vale $\Pr(B \mid A) = \Pr(B)$. Em palavras, se A é independente de B, então B também é independente de A. Por conta disso, em geral podemos dizer simplesmente que A e B são independentes. Veja, ainda, que isso acontece se, e só se, $\Pr(A \cap B) = \Pr(A)\Pr(B)$. Sendo assim, temos a seguinte definição:

> Dois eventos não vazios A e B são independentes se, e somente se,
>
> $$\Pr(A \cap B) = \Pr(A)\Pr(B).$$

Assim, ao tentarmos resolver um problema onde figuram dois eventos e quisermos calcular a probabilidade de que *ambos* ocorram, muitas vezes bastará multiplicarmos as probabilidades de que cada um deles ocorra. Mas, podemos fazer isso se, e só se, soubermos que os dois eventos são independentes.

Podemos provar também a seguinte proposição bastante natural.

Proposição 3. *Se A e B são independentes, então:*

(a) A e B^{C} são independentes.

(b) A^{C} e B^{C} são independentes.

Prova. Suponha que A e B são independentes, ou seja, que $\Pr(A \cap B) = \Pr(A)\Pr(B)$. Vamos provar primeiro o item (a). Para tanto, lembre-se de que $\Pr(B^{\mathsf{C}}) = 1 - \Pr(B)$.

Além disso, podemos escrever $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^{\mathsf{C}})$, onde $A \cap B$ e $A \cap B^{\mathsf{C}}$ são disjuntos. Logo,

$$\Pr(A) = \Pr(A \cap B) + \Pr(A \cap B^{\mathsf{C}}),$$

de sorte que

$$\begin{aligned}\Pr\left(A \cap B^{\mathsf{C}}\right) &= \Pr(A) - \Pr(A \cap B)\\ &= \Pr(A) - \Pr(A)\Pr(B)\\ &= \Pr(A)(1 - \Pr(B))\\ &= \Pr(A)\Pr(B^{\mathsf{C}}).\end{aligned}$$

Isso quer dizer que A e B^{C} são independentes.

Para provar o item (b), basta aplicar o item (a) aos conjuntos B^{C} e A no lugar de A e B, respectivamente. Tomando o complemento de A, temos que A^{C} e B^{C} são independentes. □

3 Aplicações

Exemplo 4. *Certo baralho consiste em 100 cartões numeradas de 1 a 100. Retiram-se dois cartões ao acaso (sem reposição). Qual a probabilidade de que a soma dos dois números dos cartões seja igual a 100?*

Solução. Para que a soma dos cartões seja igual a 100, o primeiro número retirado não pode ser igual a 100, e a probabilidade de que isso aconteça é $99/100$. Assumindo que isso acontece (i.e., que o primeiro número retirado não é igual a 100), ao retirarmos o segundo cartão haverá exatamente um, dentre os 99 restantes, que, quando somado ao primeiro, resulta em 100. Logo, temos uma probabilidade de $1/99$ de escolher 'corretamente' o segundo cartão. Em símbolos, denotando por C_1 o valor do primeiro carão e C_2 o valor do segundo, a probabilidade desejada é:

$$\begin{aligned}&\Pr(\text{“}C_1 \neq 100\text{” e “}C_1 + C_2 = 100\text{”}) =\\ &\Pr(\text{“}C_1 \neq 100\text{”}) \cdot \Pr(\text{“}C_1 + C_2 = 100\text{”} \mid \text{“}C_1 \neq 100\text{”}) =\\ &\qquad = \frac{99}{100} \cdot \frac{1}{99} = \frac{1}{100}.\end{aligned}$$

□

Exemplo 5. *(UERJ-2013, adaptado) Em um escritório, há dois porta-lápis: o porta-lápis A, com 10 lápis, dentre os quais 3 estão apontados, e o porta-lápis B, com 9 lápis, dentre os quais 4 estão apontados. Um funcionário retira ao acaso um lápis de A e o coloca em B. Novamente ao acaso, ele retira um lápis qualquer do porta-lápis B. Qual a probabilidade de que este último lápis não tenha ponta?*

Solução. Seja A_P o evento em que o lápis retirado de A (e colocado em B) possui ponta, e o seja A_N o evento em que o mesmo não possui ponta. É claro que $\Pr(A_P) = 3/10$ e $\Pr(A_N) = 7/10$.

Seja B_N o evento em que, após feita a transferência de A para B, o lápis que foi retirado de B não possui ponta. Queremos encontrar $\Pr(B_N)$, e observe que exatamente um entre A_P e A_N acontece. Assim, temos dois casos a considerar:

Caso 1: A_P acontece. Como o lápis que foi retirado de A tem ponta, o porta-lápis B ficará com 10 lápis, dos quais 5 não possuem ponta. Assim, $\Pr(B_N \mid A_P) = 5/10$, e a probabilidade de que A_P e B_N aconteçam é:

$$\Pr(A_P \cap B_N) = \Pr(A_P)\Pr(B_N \mid A_P) = \frac{3}{10} \cdot \frac{5}{10} = \frac{15}{100}.$$

Caso 2: A_N acontece. Como o lápis que foi retirado de A não tem ponta, o porta-lápis B ficará com 10 lápis, dos quais 6 não possuem ponta. Assim, $\Pr(B_N \mid A_P) = 6/10$, e a probabilidade de que A_N e B_N aconteçam é:

$$\Pr(A_N \cap B_N) = \Pr(A_N)\Pr(B_N \mid A_N) = \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{10} = \frac{42}{100}.$$

Por fim, como esses dois casos são disjuntos, a probabilidade de que B_N aconteça é

$$\frac{15}{100} + \frac{42}{100} = \frac{57}{100}.$$

□

O último passo da solução do exemplo anterior pode ser formalizado observando-se que, como $A_N \cup A_P$ é igual ao espaço amostral inteiro, o evento B_N pode ser escrito como a união disjunta de $(B_N \cap A_P)$ com $(B_N \cap A_N)$. Assim,

$$\Pr(B_N) = \Pr(B_N \cap A_P) + \Pr(B_N \cap A_N).$$

Isso pode ser generalizado para o seguinte teorema, cuja prova deixamos como exercício para o leitor.

Teorema 6 (Lei das probabilidades totais). *Seja B um evento e $A_1 \cup \ldots \cup A_k$ uma partição do espaço amostral. Então:*

$$\Pr(B) = \sum_{i=1}^{n} \Pr(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} \Pr(B \mid A_i)\Pr(A_i).$$

Exemplo 7. *A probabilidade de um nadador A queimar a largada em uma competição é de 18%; para o nadador B, essa probabilidade é de 12%. Se os dois nadadores estão disputando uma prova, qual é a probabilidade de que:*

(a) *ambos queimem a largada?*

(b) *nenhum deles queime a largada?*

(c) *pelo menos um queime a largada?*

Solução. Para simplificar a notação, vamos denotar simplesmente por A o evento em que "A queima a largada". Temos então que $\Pr(A) = 18/100$ e $\Pr(A^{\complement}) = 82/100$. De modo análogo, temos $\Pr(B) = 12/100$ e $\Pr(B^{\complement}) = 88/100$. Agora, analisemos os itens de (a) a (c):

(a) Certamente os eventos A e B são independentes. Assim, $\Pr(A \cap B)$ é igual a:

$$\Pr(A)\Pr(B) = \frac{18}{100} \cdot \frac{12}{100} = \frac{216}{10000} = 2{,}16\%.$$

(b) Pela Proposição 3, temos que $A^{\complement}$ e $B^{\complement}$ são independentes. Logo, $\Pr(A^{\complement} \cap B^{\complement})$ é igual a:

$$\Pr(A^{\complement})\Pr(B^{\complement}) = \frac{82}{100} \cdot \frac{88}{100} = \frac{7216}{10000} = 72{,}16\%.$$

(c) Podemos resolver este item de duas maneiras. Para a primeira, precisamos perceber que este item é o complementar do item anterior. Sendo assim, a probabilidade desejada é igual a:

$$100\% - 72{,}16\% = 27{,}84\%.$$

A segunda maneira consiste em tratar os casos em que apenas A queima a largada, apenas B o faz, e tanto A como B o fazem. Temos então a união disjunta entre $A \cap B^{\complement}$, $A^{\complement} \cap B$ e $A \cap B$. Logo, novamente pela Proposição 3, a probabilidade desejada é igual a:

$$\Pr(A)\Pr(B^{\complement}) + \Pr(A^{\complement})\Pr(B) + \Pr(A)\Pr(B).$$

Fazendo as contas, iremos obter 27,84%, como acima.

□

Exemplo 8. *Em um prédio residencial há dois blocos, A e B. No bloco A estão 40% dos apartamentos, dos quais 10% estão em atraso com o condomínio. No bloco B, 20% estão com taxas atrasadas. As fichas de todos os moradores estão reunidas e uma delas é escolhida ao acaso. Sabendo que a ficha escolhida é de um condômino em dia com as taxas, calcule a probabilidade de que ele seja do bloco B.*

Solução 1. Seja A o evento em que a ficha sorteada é do bloco A. É dado que $\Pr(A) = 40\%$. Definindo B de modo análogo, temos que $\Pr(B) = 1 - 40\% = 60\%$. É dado também que $\Pr(\text{“atraso”} \mid A) = 10\%$ e $\Pr(\text{“atraso”} \mid B) = 20\%$. Sendo assim,

$$\begin{aligned}\Pr(A \cap \text{“atraso”}) &= \Pr(A)\Pr(\text{“atraso”} \mid A)\\ &= 40\% \cdot 10\% = 4\%.\end{aligned}$$

De forma análoga, podemos calcular os demais valores na seguinte tabela que indica o percentual de condôminos em cada situação:

	Atrasado	Em dia	Total
Bloco A	4%	36%	40%
Bloco B	12%	48%	60%
Total	16%	84%	100%

Sendo assim, a probabilidade desejada é:

$$\Pr(B \mid \text{“em dia”}) = \frac{\Pr(B \cap \text{“em dia”})}{\Pr(\text{“em dia”})} = \frac{48\%}{84\%} = \frac{4}{7}.$$

□

Solução 2. Sejam A e B como na solução anterior. Veja que $\Pr(\text{“em dia”} \mid B) = 1 - 20\% = 80\%$.

Usando a equação (4), temos que:

$$\Pr(B \mid \text{“em dia”}) = \frac{\Pr(B)\Pr(\text{“em dia”} \mid B)}{\Pr(\text{“em dia”})}.$$

O numerador é igual a $60\% \cdot 80\% = 48\%$. Por outro lado, pela Lei das Probabilidades Totais, o denominador é igual a:

$$\begin{aligned}&\Pr(\text{“em dia”}) =\\ &\quad= \Pr(A)\Pr(\text{“em dia”} \mid A) + \Pr(B)\Pr(\text{“em dia”} \mid B)\\ &\quad= 40\% \cdot 90\% + 60\% \cdot 80\%\\ &\quad= 36\% + 48\% = 84\%.\end{aligned}$$

Assim,

$$\Pr(B \mid \text{“em dia”}) = \frac{48\%}{84\%} = \frac{4}{7}.$$

□

Observe que, no exemplo anterior, os valores de $\Pr(\text{“em dia”} \mid B)$ e $\Pr(B \mid \text{“em dia”})$ são bem diferentes.

Exemplo 9. *Sejam A e B eventos de um mesmo espaço amostral, sobre os quais sabe-se que a probabilidade de A é* $3/4$*, e a probabilidade de B é* $2/3$*. Se p é a probabilidade da interseção dos eventos A e B, encontre os valores máximo e o mínimo para p. Se* $p = 7/12$*, qual é a probabilidade de B ter ocorrido, sendo dado que A ocorreu?*

Solução. Lembre-se, da aula passada, que $\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$. Sendo assim,

$$\begin{aligned}p &= \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cup B)\\ &= \frac{3}{4} + \frac{2}{3} - \Pr(A \cup B)\\ &= \frac{17}{12} - \Pr(A \cup B).\end{aligned}$$

Veja que p é mínimo quando $\Pr(A \cup B)$ é máximo, e vice-versa. Assim como para qualquer probabilidade, temos que

$\Pr(A \cup B) \le 1$, e isto pode de fato acontecer, uma vez que $\Pr(A) + \Pr(B) \ge 1$. Logo o valor mínimo de p é

$$\frac{17}{12} - 1 = \frac{5}{12}.$$

Por outro lado, como $A \subseteq A \cup B$ e $B \subseteq A \cup B$, temos que $\Pr(A \cup B) \ge \max\{\Pr(A), \Pr(B)\} = 3/4$. Novamente, isso pode de fato acontecer; por exemplo, basta que $B \subset A$, pois aí $A \cup B = A$. Logo, o valor máximo de p é

$$\frac{17}{12} - \frac{3}{4} = \frac{8}{12}.$$

Agora, suponha que $p = 7/12$ (o que é viável, uma vez que, $5/12 \le 7/12 \le 8/12$). Para encontrar o valor de $\Pr(B \mid A)$ basta usar a fórmula:

$$\Pr(B \mid A) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(A)} = \frac{7/12}{3/4} = \frac{7}{9}.$$

$\square$

Exemplo 10 (Fuvest, adaptada). *Considere o experimento que consiste no lançamento de um dado perfeito (com seis faces, numeradas de* 1 *a* 6*, todas com a mesma probabilidade de serem obtidas). Considere os eventos:*

A = *"O resultado é par".*

B = *"O resultado é maior ou igual a 5".*

C = *"O resultado é múltiplo de 3".*

Pergunta-se:

(a) Os eventos A e B são independentes?

(b) Os eventos A e C são independentes?

(c) Os eventos B e C são independentes?

Solução. Precisamos calcular as probabilidades de cada um dos eventos e de suas interseções. O espaço amostral é $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e os eventos são $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{5, 6\}$ e $C = \{3, 6\}$. Assim, $\Pr(A) = 3/6 = 1/2$, $\Pr(B) = 2/6 = 1/3$ e $\Pr(C) = 2/6 = 1/3$.

(a) Sim. Temos $A \cap B = \{6\}$, logo, $\Pr(A \cap B) = 1/6$. Temos também que $\Pr(A)\Pr(B) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$, de modo que os eventos A e B são independentes. Outra maneira de verificar isso é observar que a probabilidade do número sorteado ser par na certeza de que ele é maior ou igual a 5 continua sendo igual a 1/2 (pois, no dado, só há um par maior ou igual a 5); por sua vez, isso é igual à probabilidade dele ser par.

(b) Sim. Temos $A \cap C = \{6\}$, logo, $\Pr(A \cap C) = 1/6$. Temos também que $\Pr(A)\Pr(C) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$, de modo que os eventos A e C também são independentes.

(c) Não. Temos que $B \cap C = \{6\}$, logo, $\Pr(A \cap C) = 1/6$. Mas, dessa vez, temos que $\Pr(B)\Pr(C) = \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{9}$, o que nos leva a concluir que os eventos B e C não são independentes.

$\square$

Exemplo 11. *Uma urna contém* 12 *bolas, cada uma das quais com um número de* 1 *a* 6 *nela escrito. A tabela abaixo indica quantas bolas ela contém para cada um dos números.*

Número da Bola	1	2	3	4	5	6
Qtd de Bolas	1	1	3	1	3	3

Considere os eventos A, B e C, definidos do mesmo modo que no Exemplo 10, e responda às mesmas perguntas levantadas naquele exemplo.

Solução. Neste exemplo temos um total de 12 bolas, mas algumas possuem números repetidos. Sendo assim, as probabilidades de ocorrência de cada um dos números não são todas iguais. Por exemplo, a probabilidade de se obter o número 1 é igual a 1/12, enquanto a de se obter o número 6 é igual a 3/12.

Isto posto, é imediato calcular as probabilidades dos eventos A, B e C: $\Pr(A) = 5/12$, $\Pr(B) = 6/12$ e $\Pr(C) = 6/12$. Agora, temos que:

(a) $\Pr(A \cap B) = \frac{3}{12} \ne \frac{5}{12} \cdot \frac{6}{12} = \Pr(A)\Pr(B)$. Logo, A e B não são independentes.

(b) $\Pr(A \cap C) = \frac{3}{12} \ne \frac{5}{12} \cdot \frac{6}{12} = \Pr(A)\Pr(C)$. Logo, A e C não são independentes.

(c) $\Pr(B \cap C) = \frac{3}{12} = \frac{6}{12} \cdot \frac{6}{12} = \Pr(B)\Pr(C)$. Logo, B e C são independentes.

$\square$

Problema 12. *Uma moeda honesta é lançada três vezes e são anotados os resultados (cara ou coroa) da face que ficou virada para cima. Considere os seguintes eventos:*

A = *"O número de caras é par".*

B = *"Os resultados dos dois primeiros lançamentos são iguais".*

C = *"Os dois últimos lançamentos resultaram em cara".*

Mostre que A é independente de B, A é independente de C e B é independente de C. Contudo, mostre que A não é independente do evento $B \cap C$.

Dicas para o Professor

O conceito probabilidade condicional pode ser bastante escorregadio. Assim, ele deve ser introduzido com bastante cautela. Veja, por exemplo, que não há necessidade de que exista qualquer relação de causalidade ou temporalidade sobre os eventos A e B de um experimento para que possamos definir $\Pr(A \mid B)$.

A equação (1) é o que define o conceito de probabilidade condicional. O símbolo $\Pr(A \mid B)$ é apenas uma maneira curta de escrever $\Pr(A \cap B)/\Pr(B)$, e para ele damos o nome de "probabilidade condicional". Alguns autores incluem a equação (2) como um dos axiomas da teoria das probabilidades. Intuitivamente, estamos usando o evento B para *renormalizar* as probabilidades do espaço original, obtendo assim uma nova distribuição sobre os eventos do mesmo. Isso faz com que seja possível buscar interpretações práticas para o número $\Pr(A \mid B)$.

De forma mais geral, no caso de termos um espaço amostral infinito, a Lei da Probabilidade Totais pode ser aplicada para qualquer partição de A com uma quantidade enumerável de partes. O leitor pode encontrar mais detalhes sobre essa afirmação na referência [1], por exemplo.

Sugestões de Leitura Complementar

1. T. Apostol. *Cálculo, Volume 2*. Reverté, Porto, 1993.

2. P. C. P. Carvalho, P. Fernandez, A. C. de O. Morgado, J. B. Pitombeira. *Análise Combinatória e Probabilidade*. SBM, Rio de Janeiro, 2000.

3. J. P. O. Santos, M. P. Mello e I. T. Murari. Introdução à Análise Combinatória. Rio de Janeiro, Ciência Moderna, 2007.