Material Teórico - Módulo de Introdução ao Cálculo – Funções – Parte 1

Monotonicidade, Máximos e Mínimos

Tópicos Adicionais

Autor: Prof. Angelo Papa Neto
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

7 de setembro de 2019

1 Funções monótonas

Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função. Dados $x_1 < x_2$ em I, dizemos que

(i) f é **crescente** se $f(x_1) < f(x_2)$;

(ii) f é **decrescente** se $f(x_1) > f(x_2)$;

(iii) f é **não decrescente** se $f(x_1) \leq f(x_2)$;

(iv) f é **não crescente** se $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Uma função que satisfaz uma das quatro condições acima é chamada **função monótona**.

Uma função não pode ser simultaneamente crescente e decrescente, pois isso acarretaria, para $x_1 < x_2$ em I, $f(x_1) < f(x_2)$ e $f(x_1) > f(x_2)$, o que não é possível.

Uma função pode ser simultaneamente não crescente e não decrescente. Neste caso, para quaisquer $x_1 < x_2$ em I, devemos ter $f(x_1) \leq f(x_2)$ e $f(x_1) \geq f(x_2)$, ou seja, $f(x_1) = f(x_2)$, o que significa que f é constante.

Se x_1 e x_2 são dois elementos *distintos* de I, podemos avaliar a monotonicidade da função f observando a razão

$$R_f(x_1, x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}. \tag{1}$$

De fato temos as seguintes equivalências:

(I) f é crescente se, e somente se, $R_f(x_1, x_2) > 0$, para quaisquer $x_1, x_2 \in I$;

(II) f é decrescente se, e somente se, $R_f(x_1, x_2) < 0$, para quaisquer $x_1, x_2 \in I$;

(III) f é não decrescente se, e somente se, $R_f(x_1, x_2) \geq 0$, para quaisquer $x_1, x_2 \in I$;

(IV) f é não crescente se, e somente se, $R_f(x_1, x_2) \leq 0$, para quaisquer $x_1, x_2 \in I$;

Para justificarmos as afirmações feitas acima, basta observarmos a conexão entre o sinal de $R_f(x_1, x_2)$ e a relação entre as desigualdades envolvendo x_1 e x_2, $f(x_1)$ e $f(x_2)$. Por exemplo, $R_f(x_1, x_2) > 0$ é equivalente a

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$$

e isso significa que numerador e denominador dessa fração têm o mesmo sinal. Assim, se $x_1 < x_2$, o denominador $x_2 - x_1$ é positivo, o que força o numerador $f(x_2) - f(x_1)$ a também ser positivo; por sua vez, isso significa que f é crescente, de acordo com a definição dada em (i). Reciprocamente, se f é crescente, numerador e denominador da fração em (1) têm o mesmo sinal e isso implica que $R_f(x_1, x_2) > 0$, para quaisquer $x_1, x_2 \in I$. Isso demonstra a validade de (I). O raciocínio para estabelecer os casos (II), (III) e (IV) é análogo.

Exemplo 1. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por $f(x) = ax + b$, onde $a, b \in \mathbb{R}$ são constantes. Se $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ são distintos, então*

$$\begin{aligned} R_f(x_1, x_2) &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2 + b - (ax_1 + b)}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{ax_2 - ax_1}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a. \end{aligned}$$

Se $a = 0$, então $R_f(x_1, x_2) = 0$, para quaisquer $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ distintos, logo, a função f é constante.

Se $a > 0$, então, então $R_f(x_1, x_2) = a > 0$, para quaisquer $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ distintos, logo, a função f é crescente.

Se $a < 0$, então, então $R_f(x_1, x_2) = a < 0$, para quaisquer $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ distintos, logo, a função f é decrescente.

Exemplo 2. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por $f(x) = \frac{x^3}{1+x^2}$. Explique, com justificativa, se f é monótona.*

Solução. Precisamos verificar o sinal da razão $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, para quaisquer x_1 e x_2 reais distintos. Calculemos $R_f(x_1, x_2)$:

$$\begin{aligned} R_f(x_1, x_2) &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{1}{x_2 - x_1}\left(\frac{x_2^3}{x_2^2 + 1} - \frac{x_1^3}{x_1^2 + 1}\right) \\ &= \frac{x_2^3(x_1^2 + 1) - x_1^3(x_2^2 + 1)}{(x_2 - x_1)(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)} \\ &= \frac{x_2^3 x_1^2 + x_2^3 - x_1^2 x_2^3 - x_1^3}{(x_2 - x_1)(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)} \\ &= \frac{x_1^2 x_2^2 (x_2 - x_1) + (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_2 x_1 + x_1^2)}{(x_2 - x_1)(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)} \\ &= \frac{\cancel{(x_2 - x_1)}(x_1^2 x_2^2 + x_2^2 + x_2 x_1 + x_1^2)}{\cancel{(x_2 - x_1)}(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)} \\ &= \frac{x_1^2 x_2^2 + x_2^2 + x_2 x_1 + x_1^2}{(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)}. \end{aligned}$$

Agora, note que

$$\begin{aligned} x_2^2 + x_2 x_1 + x_1^2 &= \left(x_2^2 + x_2 x_1 + \frac{x_1^2}{4}\right) + \frac{3x_1^2}{4} \\ &= \left(x_2 + \frac{x_1}{2}\right)^2 + \frac{3x_1^2}{4}, \end{aligned}$$

que é positivo se $x_1 \neq x_2$ (pois a única forma de ser igual a 0 é se tivéssemos $x_2 + \frac{x_1}{2} = 0$ e $x_1 = 0$, o que acarretaria $x_1 = x_2 = 0$). Assim,

$$R_f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 x_2^2 + \left(x_2 + \frac{x_1}{2}\right)^2 + \frac{3x_1^2}{4}}{(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)} > 0 \tag{2}$$

Sendo $R_f(x_1, x_2)$ positiva para todos x_1 e x_2 distintos, concluímos que f é crescente. □

Se a função h é dada pela soma das funções f e g, então sua monotonicidade pode decorrer das monotonicidades de f e g. Por exemplo, se f e g forem crescentes, então, para x_1 e x_2 reais distintos, $R_f(x_1, x_2) > 0$ e $R_g(x_1, x_2) > 0$; por outro lado, $h = f + g$ implica

$$\begin{aligned} R_h(x_1, x_2) &= \frac{h(x_2) - h(x_1)}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{f(x_2) + g(x_2) - f(x_1) - g(x_1)}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} + \frac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1} \\ &= R_f(x_1, x_2) + R_g(x_1, x_2) > 0 \end{aligned}$$

Da mesma forma, se f e g forem decrescentes (resp. não crescentes, não decrescentes), então h será decrescente (resp. não crescente, não decrescente).

Exemplo 3. *Encontre os valores de $a \in \mathbb{R}$ para os quais a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^3 + ax$, é crescente.*

Solução. A resposta é: a função f é crescente se, e somente se, $a \geq 0$.

Primeiro vamos tratar o caso em que $a = 0$. Neste caso, $f(x) = x^3$ e, para x_1 e x_2 números reais distintos,

$$\begin{aligned} R_f(x_1, x_2) &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{x_2^3 - x_1^3}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{\cancel{(x_2 - x_1)}(x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2)}{\cancel{x_2 - x_1}} \\ &= x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2 \\ &= \left(x_2 + \frac{x_1}{2}\right)^2 + \frac{3x_1^2}{4} > 0. \end{aligned}$$

Agora, se $a > 0$, vimos no Exemplo 1 que a função $x \mapsto ax$ também é crescente. Portanto, de acordo com a discussão que precede esse exemplo, $f(x) = x^3 + ax$ é crescente, pois é a soma de duas funções crescentes.

Por fim, se $a < 0$, vamos mostrar que f não é crescente. Para isso, vamos exibir números reais $x_1 < x_2$ tais que $f(x_1) > f(x_2)$.

Seja $b = -a > 0$. Se $x_1 = \frac{\sqrt{b}}{3}$ e $x_2 = \frac{\sqrt{b}}{2}$, temos, por um lado, $x_1 < x_2$; por outro,

$$f(x_1) = \left(\frac{\sqrt{b}}{3}\right)^3 + a\left(\frac{\sqrt{b}}{3}\right) = \frac{b\sqrt{b}}{27} - b \cdot \frac{\sqrt{b}}{3} = -\frac{8b\sqrt{b}}{27}$$

e

$$f(x_2) = \left(\frac{\sqrt{b}}{2}\right)^3 + a\left(\frac{\sqrt{b}}{2}\right) = \frac{b\sqrt{b}}{8} - b \cdot \frac{\sqrt{b}}{2} = -\frac{3b\sqrt{b}}{8}.$$

Agora, como $-b\sqrt{b} < 0$,

$$\frac{8}{27} < \frac{3}{8} \Rightarrow -\frac{8b\sqrt{b}}{27} > -\frac{3b\sqrt{b}}{8} \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

□

2 Máximos e mínimos

Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função. Um número real y_0 é um **valor mínimo** de f se as duas condições a seguir forem satisfeitas:

(a) existe $x_0 \in I$ tal que $f(x_0) = y_0$;

(b) $y_0 \leq f(x)$, para todo $x \in I$.

Da mesma forma, um número real y_1 é um **valor máximo** de f se as duas condições a seguir forem satisfeitas:

(A) existe $x_1 \in I$ tal que $f(x_1) = y_1$;

(B) $f(x) \leq y_1$, para todo $x \in I$.

O valor mínimo de uma função f, se existir, é único. De fato, se y_0 e z_0 satisfazem (a), então $y_0 = f(x_0)$ e $z_0 = f(u_0)$, para certos $x_0, u_0 \in I$. Mas, como y_0 e z_0 também satisfazem (b), temos

$$y_0 \leq f(u_0) = z_0 \quad \text{e} \quad z_0 \leq f(x_0) = y_0,$$

de forma que $y_0 = z_0$.

De modo análogo, *o valor máximo de uma função, se existir, é único.*

Devemos observar, no entanto, que, embora os valores máximo e mínimo de uma função sejam únicos se existirem, eles podem ser imagens de mais de um elemento do domínio. Vejamos um exemplo nesse sentido.

Exemplo 4. *A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \operatorname{sen} x$, tem valor máximo igual a 1 e valor mínimo igual a -1. Esses valores são atingidos um infinidade de vezes pela função. De fato, para todo $k \in \mathbb{Z}$, temos*

$$\operatorname{sen}\left(\frac{(4k+1)\pi}{2}\right) = 1 \quad e \quad \operatorname{sen}\left(\frac{(4k+3)\pi}{2}\right) = -1.$$

Conforme antecipamos acima, uma função pode não ter valor máximo e/ou mínimo.

Exemplo 5. *A função $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \frac{1}{x}$, admite valor máximo 1 mas não admite valor mínimo.*

Solução. Se $x \in [1, +\infty)$, então $x \geq 1$, logo, $f(x) = \frac{1}{x} \leq 1$; assim, $y_1 = 1$ satisfaz (B). Como $f(1) = 1$, y_1 também satisfaz (A). Portanto, $y_1 = 1$ é o valor máximo de f.

Por outro lado, f não admite valor mínimo. De fato, temos de mostrar que nenhum valor na imagem de f é menor que todos os outros, o que pode ser feito observando-se que, para $x_0 > 1$, temos $2x_0 > x_0$ (logo, $2x_0 > 1$) e

$$f(2x_0) = \frac{1}{2x_0} < \frac{1}{x_0} = f(x_0).$$

□

Deixamos como exercício para o leitor verificar que a função $f : (-\infty, -1] \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \frac{1}{x}$, admite valor mínimo -1 mas não admite valor máximo. Também, a função $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \frac{1}{x}$, não admite nem valor máximo nem valor mínimo.

Quando precismos falar sobre o valor máximo ou mínimo de uma função f sem especificar se esse valor é o máximo ou o mínimo, costumamos nos referir a tal número como um **valor extremo** de f.

A proposição a seguir estuda os valores extremos de funções quadráticas.

Proposição 6. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função quadrática dada por*

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \tag{3}$$

com $a, b, c\mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Se $\Delta = b^2 - 4ac$, então o valor extremo de f é $y_m = -\frac{\Delta}{4a}$, sendo atingindo somente no ponto $x_m = -\frac{b}{2a}$. Além disso,

(*a*) *se $a > 0$, então y_m é o valor mínimo de f;*

(*b*) *se $a < 0$, então y_m é o valor máximo de f.*

Prova. Vamos começar escrevendo a expressão da função f em uma forma que torne mais simples a procura por seu valor extremo. Faremos isso "completando quadrados" (veja o módulo *Equações do segundo grau*, do nono ano, ou, ainda, as soluções dos exemplos 2 e 3).

Como $a \neq 0$, podemos escrever

$$\begin{aligned} f(x) &= a \cdot \left(x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a} \right) \\ &= a \cdot \left[x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} \right], \end{aligned}$$

onde o termo $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ foi soma e subtraído para que as três primeiras parcelas do fator entre colchetes na última expressão acima se tornem um *quadrado perfeito*. Realmente,

$$f(x) = a \cdot \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} \right] =$$

$$= a \cdot \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right] =$$

$$= a \cdot \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right].$$

Usando a notação $\Delta = b^2 - 4ac$, podemos escrever

$$f(x) = a \cdot \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right], \tag{4}$$

expressão a que nos referimos como a **forma canônica** da função quadrática f. Ela vai nos permitir demonstrar as afirmações feitas na Proposição.

Como quadrados de números reais não podem ser negativos, temos $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ e a igualdade vale se, e somente se, $x + \frac{b}{2a} = 0$, isto é, $x = -\frac{b}{2a}$. Logo,

$$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \geq -\frac{\Delta}{4a^2}. \tag{5}$$

Multiplicando (5) por $a \neq 0$, temos dois casos a considerar:

Se $a > 0$, a multiplicação de (5) por a não altera a desigualdade, de sorte que obtemos

$$f(x) = a \cdot \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] \geq a \left(-\frac{\Delta}{4a^2} \right) = -\frac{\Delta}{4a}$$

e a igualdade vale se, e somente se, $x = -\frac{b}{2a}$.

Se $a < 0$, a multiplicação de (5) por (a) inverte a desigualdade, e obtemos

$$f(x) = a \cdot \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] \leq -\frac{\Delta}{4a}.$$

Novamente, a igualdade vale se, e somente se, $x = -\frac{b}{2a}$. ☐

A proposição anterior nos permite apresentar várias aplicações interessantes. Apresentamos uma delas aqui, remetendo o leitor às referências para outras tantas.

Exemplo 7. *Dentre todos os retângulos de mesmo perímetro, qual tem a maior área?*

Solução. Se um retângulo tem base x e altura y, então seu perímetro (que é igual à soma das medidas de seus lados) é igual a $2x + 2y$.

Fixado um número real positivo p, considere todos os possíveis retângulos cujo perímetro é p, ou seja, retângulos com base x e altura y tais que

$$2x + 2y = p \tag{6}$$

Cada um de tais retângulos tem área $A = xy$. Da igualdade (6), segue que $y = \frac{p}{2} - x$. Substituindo essa expressão para y naquela para a área A, obtemos $A(x) = x\left(\frac{p}{2} - x\right)$, ou seja,

$$A(x) = -x^2 + \frac{p}{2} \cdot x. \tag{7}$$

Assim, a área de cada retângulo de perímetro p pode ser expressa como uma função do comprimento de sua base x, dada pela expressão (7). Essa função é quadrática, com $a = -1 < 0$, $b = \frac{p}{2}$ e $c = 0$. Logo, $A(x)$ admite um único valor máximo, dado por $-\frac{\Delta}{4a}$, o qual só é realizado quando

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{p/2}{2(-1)} = \frac{p}{4}.$$

Observe que, neste caso, $y = \frac{p}{2} - x = \frac{p}{4} = x$. Portanto, dentre todos os retângulos de mesmo perímetro, o que tem área máxima é o quadrado. ☐

Observação 8. *O Exemplo 7 é caso particular de um problema geométrico famoso, chamado* ***problema isoperimétrico:*** dentre todas as curvas simples fechadas no plano, a que delimita a região com maior área é o círculo. *Uma curva é dita simples quando não tem auto interseções e é dita fechada se um ponto que a percorre, deixando seu interior sempre à esquerda, retorna eventualmente à posição inicial.*

2.1 Mais sobre mínimos e máximos

Os conceitos de valor máximo e valor mínimo podem ser facilmente estendidos a funções reais definidas em um conjunto não vazio X qualquer. Mais precisamente, dada uma função $f : X \to \mathbb{R}$, dizemos que $y_0 \in \mathbb{R}$ é um valor mínimo (resp. máximo) de f se as duas condições a seguir forem satisfeitas:

(a) existe $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) = y_0$;

(b) $y_0 \leq f(x)$ (resp. $y_0 \geq f(x_0)$), para todo $x \in X$.

Nesta seção, vamos mostrar como obter os valores mínimo e máximo de uma função real definida sobre um círculo. Para tanto, começamos discutindo a *desigualdade de Cauchy*.

Se a, b, c e d são números reais, então, efetuando a multiplicação $(a^2+b^2)(c^2+d^2)$ e completando quadrados, obtemos

$$\begin{aligned}(a^2+b^2)(c^2+d^2) &= (ac)^2+(ad)^2+(bc)^2+(bd)^2\\ &= [(ac)^2+(bd)^2]+[(ad)^2+(bc)^2]\\ &= [(ac)^2+2(ac)(bd)+(bd)^2]\\ &\quad+[(ad)^2-2(ad)(bc)+(bc)^2]\\ &= (ac+bd)^2+(ad-bc)^2.\end{aligned}$$

A igualdade

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac+bd)^2+(ad-bc)^2 \tag{8}$$

é conhecida como **identidade de Euler**.

A partir de (8), e notando que $(ad-bc)^2 \geq 0$, obtemos

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) \geq (ac+bd)^2. \tag{9}$$

Essa desigualdade é uma igualdade só quando $ad-bc=0$, ou seja (assumindo que $c, d \neq 0$), só quando $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

Extraindo raízes quadradas, vemos que a desigualdade (9) é equivalente a

$$|ac+bd| \leq \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}, \tag{10}$$

onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e as barras verticais indicam o valor absoluto. Sendo $c, d \neq 0$, a condição para que ela se torne uma igualdade continua a mesma: $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

A desigualdade (10) é caso particular da desigualdade mais geral

$$|a_1b_1+\cdots+a_nb_n| \leq \sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}\sqrt{b_1^2+\cdots+b_n^2}, \tag{11}$$

para $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ e $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$, com igualdade ocorrendo se, e somente se, $\frac{a_1}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$, desde que nenhum denominador se anule.

Chamamos (11) de **desigualdade de Cauchy**. Não demonstraremos essa desigualdade aqui. O leitor interessado encotrará duas demonstrações diferentes na sugestão de leitura complementar 2, e uma terceira na sugestão de leitura complementar 4.

Aqui, nossa intenção é exibir uma aplicação da desigualdade (10) a máximos e mínimos de funções.

Exemplo 9. *No plano cartesiano, seja $\mathcal{S}$ o círculo de centro na origem e raio 1, de sorte que*

$$\mathcal{S} = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R};\ x^2+y^2=1\}.$$

Sejam a e b são constantes reais não nulas e $f : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ a função dada por $f(x,y) = ax+by$. Encontre, se existirem, os valores máximo e mínimo de f.

Solução. Os pares ordenados $(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, tais que $x^2+y^2=1$, correspondem aos pontos do círculo de raio 1 centrado na origem do plano cartesiano. Vamos encontrar os pontos desse círculo para os quais a função f atinge seus extremos, bem como calcular esses valores extremos.

Observe que, da desigualdade (10), segue que

$$|f(x,y)| = |ax+by| \leq \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{a^2+b^2},$$

pois $x^2+y^2=1$. Isso significa que

$$-\sqrt{a^2+b^2} \leq f(x,y) \leq \sqrt{a^2+b^2}. \tag{12}$$

Para que $-\sqrt{a^2+b^2}$ seja o valor mínimo de f, resta mostrar que existe um ponto (x_0, y_0) do círculo tal que $f(x_0,y_0) = -\sqrt{a^2+b^2}$. Da mesma forma, para que $\sqrt{a^2+b^2}$ seja o valor máximo de f, temos de mostrar que existe um ponto (x_0', y_0') do círculo tal que $f(x_0', y_0') = \sqrt{a^2+b^2}$. Faremos isto examinando se as desigualdades em (12) podem tornar-se igualdades.

Uma vez que (12) foi obtida com o uso de (10), para que (12) seja uma igualdade devemos ter $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$, ou seja, $y = \frac{bx}{a}$. Como $x^2+y^2=1$, temos $x^2+\left(\frac{bx}{a}\right)^2 = 1$ ou, o que é o mesmo, $(a^2+b^2)x^2 = a^2$. Logo,

$$x = \pm\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \ \text{ e } \ y = \frac{bx}{a} = \pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Por fim, cálculos diretos mostram que

$$f\left(\frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = -\sqrt{a^2+b^2}$$

e

$$f\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = \sqrt{a^2+b^2}.$$

Conforme comentamos anteriormente, isso mostra que os valores extremos de são efetivamente atingidos, ou seja, são imagens de ponto do círculo. Portanto, o valor mínimo e o valor máximo de f são, respectivamente, $-\sqrt{a^2+b^2}$ e $\sqrt{a^2+b^2}$. □

Dicas para o Professor

O material desta aula deve ser coberto em pelo menos três encontros de 50 minutos cada.

Usamos a razão $R_f(x_1, x_2)$ como modo de antecipadamente aproximar a questão da monotonicidade com a verificação do sinal da derivada, conexão que será completada em aulas futuras.

O uso de funções quadráticas na busca de extremos de funções, como no Exemplo 7, pode ser explorado mais a fundo (veja os exercícios resolvidos nas vídeo-aulas).

Na solução do Exemplo 9, usamos apenas a desigualdade de Cauchy com $n = 2$, caso para o qual apresentamos uma demonstração. Com isso, a solução desse exemplo está autocontida neste texto.

O capítulo 7 da sugestão de leitura complementar 2 exibe algumas desigualdades fundamentais. Outras aplicações das mesmas à determinação de máximos e mínimos de funções podem ser vistos na sugestão de leitura complementar 4.

O uso de desigualdades para a solução de problemas de máximo e mínimo também é explorado de modo eficaz e elegante nas sugestões de leitura complementar 5.

Conexões entre desigualdades e problemas geométricos bastante interessantes, inclusive o problema isoperimétrico, são exploradas na sugestão de leitura complementar 3 e 6.

Sugestões de Leitura Complementar

1. E. L. Lima et al. *A Matemática do Ensino Médio*, vol. 3. Coleção do Professor de Matemática, Editora S.B.M., Rio de Janeiro, 1998.
2. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar*, vol. 1. Coleção do Professor de Matemática, Editora S.B.M., Rio de Janeiro, 2013.
3. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar*, vol. 2. Coleção do Professor de Matemática, Editora S.B.M., Rio de Janeiro, 2013.
4. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar*, vol. 3. Coleção do Professor de Matemática, Editora S.B.M., Rio de Janeiro, 2013.
5. I. Niven. *Maxima and Minima without Calculus*. The Dolciani Mathematical Expositions, 6, MAA, 1981.
6. N. D. Kazarinoff, *Geometric Inequalities*. New Mathematical Library, Random House, 1961.