Material Teórico - Módulo de Introdução ao Cálculo – Leis do Limite – Parte 1

Introdução

Tópicos Adicionais

Autor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

10 de fevereiro de 2021

Neste material, nosso objetivo inicial é estabelecer regras que permitam calcular limites tais como

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to a} f(x)g(x), \tag{1}$$

partindo dos valores de $\lim_{x\to a} f(x)$ e $\lim_{x\to a} g(x)$. Para tanto, comecemos recordando em linhas gerais a definição formal de limite, apresentada no material da aula "Limites de Funções" do módulo "Limites - Parte I". Baseamo-nos parcialmente no capítulo 3 de [1].

Aqui, por simplicidade, tomamos um intervalo $I \subset \mathbb{R}$, um ponto $a \in I$ e uma função $f : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$. Recordamos que, de um ponto de vista *qualitativo*, a da expressão

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \tag{2}$$

significa que podemos tornar $f(x)$ tão próximo de ℓ quanto desejado, bastando, para tanto, tomar $x \in I$ suficientemente próximo (mas diferente) de a.

Anteriormente, quantificamos a validade de (2) da seguinte forma: para cada erro $\epsilon > 0$ dado (para ℓ), deve existir um erro $\delta > 0$ (para a) tal que

$$x \in I \text{ e } 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon. \tag{3}$$

Em palavras, (3) ocorre quando, fixado o erro $\epsilon > 0$ para ℓ, existir um erro $\delta > 0$ para a tal que aproximações $x \neq a$ de a em I com erro menor do que δ correspondam a aproximações $f(x)$ de ℓ com erro menor do que ϵ.

Geometricamente, queremos que, para todo $x \in I$ suficientemente próximo de a mas *diferente* de a, o ponto do gráfico de f com abscissa x (isto é, o ponto $(x,f(x))$) pertença à faixa cinza do plano, na Figura 1.

Conforme você deve ter percebido quando justificamos a validade de alguns limites no material da aula "Limites de Funções" do módulo "Limites - Parte I", essa tarefa é sempre um *jogo de gato e rato*: arbitrado o erro $\epsilon > 0$ para o candidato ℓ a limite, temos de ser capazes de encontrar um erro $\delta > 0$ para a (o qual, em geral, dependerá tanto

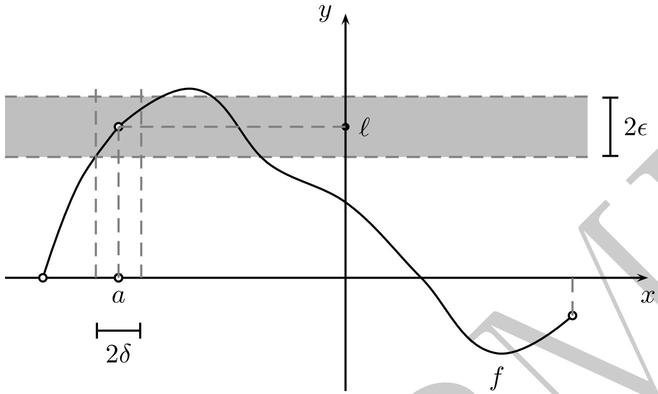

Figura 1: interpretando geometricamente a noção de limite de uma função.

do ϵ dado quanto do próprio a) de modo que a validade da condição $0 < |x - a| < \delta$ para um elemento $x \in I$ acarrete a validade da condição $|f(x) - \ell| < \epsilon$.

Antes de passarmos à discussão propriamente dita sobre como calcular (1), é interessante relembrarmos, em dois exemplos, como a implementação da estratégia acima se processa.

Exemplo 1. Para verificar que $\lim_{x\to 2}(-2x + 7) = 3$, partimos de $x \in \mathbb{R}$ sujeito a um erro do tipo $0 < |x - 2| < \delta$ e estimamos $|(-2x + 7) - 3|$:

$$|(-2x + 7) - 3| = | - 2x + 4| = 2|x - 2| < 2\delta.$$

Então, dado um erro $\epsilon > 0$ para 3, a fim de que $|(-2x + 7) - 3| < \epsilon$ é suficiente escolhermos $\delta > 0$ de modo que $2\delta \leq \epsilon$. Com um tal δ, temos claramente que

$$x \in \mathbb{R} \text{ e } 0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow |(-2x + 7) - 3| < 2\delta \leq \epsilon,$$

conforme desejado.

Exemplo 2. A fim de mostrar que $\lim_{x\to 3} x^2 = 9$, partindo de $x \in \mathbb{R}$ sujeito a um erro do tipo $0 < |x-3| < \delta$, começamos estimando $|x^2-9|$:

$$\begin{aligned}|x^2-9| &= |x-3||x+3| \\ &< \delta|x-3+6| \\ &\le \delta(|x-3|+6) \\ &< \delta(\delta+6),\end{aligned}$$

onde utilizamos a desigualdade triangular para números reais[1] na penúltima passagem acima.

Portanto, caso seja possível escolhermos $\delta > 0$ de tal forma que $\delta(\delta+6) \le \epsilon$, teremos que

$$x \in \mathbb{R} \text{ e } 0 < |x-3| < \delta \Rightarrow |x^2-9| < \delta(\delta+6) \le \epsilon,$$

conforme desejado.

Resta mostrarmos que a escolha de $\delta > 0$ é possível, para o que basta resolver a inequação $\delta(\delta+6) \le \epsilon$. Ao fazê-lo, obtemos

$$0 < \delta \le \sqrt{\epsilon+9} - 3.$$

Voltando ao caso geral, suponha que tenhamos uma função $f : I\backslash\{a\} \to \mathbb{R}$ (em que I é um intervalo e $a \in I$) e queiramos provar que $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$.

Utilizando a discussão dos dois exemplos acima como guia para , concluímos que uma boa estratégia é, partindo de $x \in I$ sujeito a um erro do tipo $0 < |x-a| < \delta$, estimar o erro $|f(x)-\ell|$ em termos de δ *por excesso*, obtendo uma desigualdade do tipo

$$|f(x) - L| < E(\delta),$$

onde E representa uma certa função de δ (no Exemplo 1, encontramos $E(\delta) = 2\delta$, ao passo que no Exemplo 2 encontramos $E(\delta) = \delta(\delta+6)$).

[1] Recorde que essa desigualdade afirma que, dados $u,v \in \mathbb{R}$, tem-se sempre $|u+v| \le |u| + |v|$.

Em seguida, impomos que tal erro $E(\delta)$ não ultrapasse o erro ϵ desejado, descobrindo, então, os valores apropriados de δ. Usualmente, esse segundo passo se resume a resolver, para $\delta > 0$, a inequação $E(\delta) \leq \epsilon$.

Por fim, se $\delta > 0$ satisfizer $E(\delta) \leq \epsilon$, teremos claramente que

$$x \in I \text{ e } 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < E(\delta) \leq \epsilon,$$

conforme desejado.

Podemos finalmente começar a elucidar como os limites em (1) se comportam a partir dos limites $\lim_{x\to a} f(x)$ e $\lim_{x\to a} g(x)$.

Proposição 3. *Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo, $a \in I$ e $f,g : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ duas funções dadas. Se $\lim_{x\to a} f(x) = \ell_1$ e $\lim_{x\to a} g(x) = \ell_2$, então:*

(*a*) $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = \ell_1 + \ell_2$.

(*b*) $\lim_{x\to a}(f(x) - g(x)) = \ell_1 - \ell_2$.

Prova. Façamos a demonstração do item (a). A demonstração do item (b) é completamente análoga e pode ser deixada como exercício para você.

Suponhamos dado um erro $\epsilon > 0$. Como indicado anteriormente, tentaremos estimar $|(f(x) + g(x)) - (\ell_1 + \ell_2)|$ por excesso, em termos de $|f(x) - \ell_1|$ e $|g(x) - \ell_2|$. Como

$$\begin{aligned} |(f(x) + g(x)) - (\ell_1 + \ell_2)| &= |(f(x) - \ell_1) + (g(x) - \ell_2)| \\ &\leq |f(x) - \ell_1| + |g(x) - \ell_2| \end{aligned}$$

(pela desigualdade triangular), a fim de que seja $|(f(x) + g(x)) - (\ell_1 + \ell_2)| < \epsilon$ para $x \in I$ próximo a (mas diferente de) a, é suficiente que tenhamos

$$|f(x) - \ell_1| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{e} \quad |g(x) - \ell_2| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Mas, como $\frac{\epsilon}{2} > 0$ e $\lim_{x\to a} f(x) = \ell_1$ e $\lim_{x\to a} g(x) = \ell_2 M$, a definição de limite garante a existência de erros $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que

$$x \in I \text{ e } 0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - \ell_1| < \frac{\epsilon}{2}$$

e

$$x \in I \text{ e } 0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - \ell_2| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Portanto, sendo $\delta = \min\{\delta_1,\delta_2\}$, temos $\delta > 0$, e a validade das condições $x \in I$ e $0 < |x-a| < \delta$ acarreta simultaneamente que $|f(x) - \ell_1| < \frac{\epsilon}{2}$ e $|g(x) - \ell_2| < \frac{\epsilon}{2}$. Assim, para $0 < |x-a| < \delta$, temos

$$|(f(x)+g(x))-(\ell_1+\ell_2)| \leq |f(x)-\ell_1|+|g(x)-\ell_2| < \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

conforme desejado. □

Antes de continuar, precisamos estabelecer um fato importante sobre limites de funções, conhecido como o **lema de permanência do sinal**. Em palavras, ele diz que, se $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$, com $\ell \neq 0$, então existe uma vizinhança de a tal que f tem o mesmo sinal de ℓ em todos os pontos de seu domínio contidos em tal vizinhança (exceto, possivelmente, em a).

Lema 4 (de permanência do sinal). *Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo, $a \in I$ e $f : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ uma função dada. Se $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$, com $\ell \neq 0$, então existe $\delta > 0$ tal que*

$$x \in I \text{ e } 0 < |x-\ell| < \delta \Rightarrow \begin{cases} \frac{\ell}{2} < f(x) < \frac{3\ell}{2}, & \text{se } \ell > 0 \\ -\frac{3\ell}{2} < f(x) < -\frac{\ell}{2}, & \text{se } \ell < 0 \end{cases}.$$

Prova. Suponhamos $\ell > 0$ (o outro caso é análogo). Pela definição de limite, dado $\epsilon = \frac{\ell}{2} > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in I \text{ e } 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \frac{\ell}{2}.$$

Basta, agora, observar que

$$\begin{aligned} |f(x) - \ell| < \frac{\ell}{2} &\Leftrightarrow -\frac{\ell}{2} < f(x) - \ell < \frac{\ell}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{\ell}{2} < f(x) < \frac{3\ell}{2}. \end{aligned}$$

□

Observarmos, agora, o seguinte: dados $I \subset \mathbb{R}$ intervalo, $a \in I$ e uma função $g : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x\to a} g(x) = \ell$, com $\ell \neq 0$, o lema anterior garante a existência de $r > 0$ tal que a função g não se anula no intervalo (possivelmente menor) $J \setminus \{a\}$, onde $J = I \cap (a - r,a + r)$. Portanto, ao considerarmos a função $x \mapsto \frac{1}{g(x)}$, sempre suporemos implicitamente que seu domínio é esse intervalo possivelmente menor $J \setminus \{a\}$.

Proposição 5. *Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo, $a \in I$ e $f,g : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ duas funções dadas. Se $\lim_{x\to a} f(x) = \ell_1$ e $\lim_{x\to a} g(x) = \ell_2$, então:*

(*a*) $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \ell_1\ell_2$.

(*b*) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell_1}{\ell_2}$, *caso* $\ell_2 \neq 0$.

Prova. Nos dois itens a seguir, suponhamos dado $\epsilon > 0$.

(a) Estimemos $|f(x)g(x) - \ell_1\ell_2|$ por excesso, em termos de $|f(x) - \ell_1|$ e $|g(x) - \ell_2|$. Inicialmente, segue da desigualdade triangular que

$$\begin{aligned}
|f(x)g(x) - \ell_1\ell_2| &= |f(x)(g(x) - \ell_2) + (f(x) - \ell_1)\ell_2| \\
&\leq |f(x)||g(x) - \ell_2| + |f(x) - \ell_1||\ell_2| \\
&\leq (|f(x) - \ell_1| + |\ell_1|)|g(x) - \ell_2| \\
&\quad + |f(x) - \ell_1||\ell_2| \\
&= |f(x) - \ell_1||g(x) - \ell_2| + |\ell_1||g(x) - \ell_2| \\
&\quad + |\ell_2||f(x) - \ell_1|.
\end{aligned}$$

Portanto, a fim de que seja $|f(x)g(x) - \ell_1\ell_2| < \epsilon$ para $x \in I$ próximo a (mas diferente de) a, é suficiente que tenhamos cada uma das parcelas

$$|f(x) - \ell_1||g(x) - \ell_2|, \quad |\ell_1||g(x) - \ell_2|, \quad |\ell_2||f(x) - \ell_1|$$

seja menor que $\frac{\epsilon}{3}$. Para tanto, basta que tenhamos, por exemplo,

$$|f(x) - \ell_1|,|g(x) - \ell_2| < \sqrt{\frac{\epsilon}{3}},$$

$$|g(x) - \ell_2| < \frac{\epsilon}{3(|\ell_1| + 1)} \ \text{ e } \ |f(x) - \ell_1| < \frac{\epsilon}{3(|\ell_2| + 1)}.$$

Em suma, é suficiente que tenhamos

$$|f(x) - \ell_1| < \min\left\{\sqrt{\frac{\epsilon}{3}}, \frac{\epsilon}{3(|\ell_2| + 1)}\right\}$$

e

$$|g(x) - \ell_2| < \min\left\{\sqrt{\frac{\epsilon}{3}}, \frac{\epsilon}{3(|\ell_1| + 1)}\right\}.$$

A fim de garantir a validade das últimas duas desigualdades acima, faça

$$\epsilon_1 = \min\left\{\sqrt{\frac{\epsilon}{3}}, \frac{\epsilon}{3(|\ell_2| + 1)}\right\} \ \text{ e } \ \epsilon_2 = \min\left\{\sqrt{\frac{\epsilon}{3}}, \frac{\epsilon}{3(|\ell_1| + 1)}\right\}.$$

Então, $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$, e a definição de limite garante a existência de erros $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que

$$x \in I \ \text{ e } \ 0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - \ell_1| < \epsilon_1$$

e

$$x \in I \ \text{ e } \ 0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - \ell_2| < \epsilon_2.$$

Portanto, se $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, então $\delta > 0$ e a concomitância das condições $x \in I$ e $0 < |x - a| < \delta$ acarreta, simultaneamente, $|f(x) - \ell_1| < \epsilon_1$ e $|g(x) - \ell_2| < \epsilon_2$, como era necessário.

(b) Observamos inicialmente que, pelo lema de permanência do sinal, existe $\delta_0 > 0$ tal que $|g(x)| > \frac{|\ell_2|}{2}$ para $x \in I$ e $0 < |x - a| < \delta_0$. Portanto, consideraremos a função $x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$ definida em $J = I \cap (a - \delta_0, a + \delta_0)$.

Se mostrarmos que

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\ell_2}, \tag{4}$$

seguirá do item (a) que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} = \ell_1 \cdot \frac{1}{\ell_2} = \frac{\ell_1}{\ell_2},$$

conforme desejado.

Para demonstrar (4), raciocinando como nos itens anteriores, estimemos

$$\left|\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{\ell_2}\right|$$

por excesso, em termos de $|g(x)-\ell_2|$.

Como $|g(x)|>\frac{|\ell_2|}{2}$ para $x\in J\setminus\{a\}$, temos

$$\left|\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{\ell_2}\right|=\frac{|g(x)-\ell_2|}{|g(x)||\ell_2|}\leq\frac{2}{\ell_2^2}|g(x)-\ell_2|.$$

Portanto, a fim de que seja $\left|\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{\ell_2}\right|<\epsilon$, basta termos $|g(x)-\ell_2|<\frac{\ell_2^2\epsilon}{2}$.

Assim, adicionalmente ao $\delta_0>0$ acima, basta escolhermos (invocando a definição de limite) um real $\delta_1>0$ tal que

$$x\in J\ \text{ e }\ 0<|x-a|<\delta_1\Rightarrow|g(x)-\ell_2|<\frac{\ell_2^2\epsilon}{2}.$$

Sendo $\delta=\min\{\delta_0,\delta_1\}$, temos que $\delta>0$ e, para $x\in J$ e $0<|x-x_0|<\delta$, que $|g(x)|<\frac{|\ell_2|}{2}$ e $|g(x)-\ell_2|<\frac{\ell_2^2\epsilon}{2}$, conforme necessário. □

Antes de examinarmos alguns exemplos, é importante pontuar algumas consequências importantes das proposições 3 e 5.

- Tomando $g(x)=c$ (uma função constante) na Proposição 3 e no item (a) da Proposição 5, temos que

$$\lim_{x\to a}(f(x)\pm c)=\lim_{x\to a}f(x)\pm c\ \text{ e }\ \lim_{x\to a}cf(x)=c\lim_{x\to a}f(x).$$

- Uma fácil indução permite estender as fórmulas das proposições 3 e 5 a uma quantidade finita de funções. Especificamente, se I é um intervalo, $a\in I$ e $f_1,\ldots,f_n:I\setminus\{a\}\to\mathbb{R}$ são tais que $\lim_{x\to a}f_j(x)=\ell_j$ para $1\leq j\leq n$, então

$$\lim_{x\to a}(f_1(x)\pm\ldots\pm f_n(x))=\ell_1\pm\ldots\pm\ell_n \qquad (5)$$

e

$$\lim_{x\to a} f_1(x)\ldots f_n(x) = \ell_1 \ldots \ell_n. \qquad (6)$$

- Como caso particular de (6), se $n \in \mathbb{N}$ e $f : I\setminus\{a\} \to \mathbb{R}$ é tal que $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$, então

$$\lim_{x\to a} f(x)^n = \ell^n. \qquad (7)$$

Mais particularmente ainda, como $\lim_{x\to a} x = a$, temos que

$$\lim_{x\to a} x^n = a^n \quad \text{e (se } a \neq 0\text{)} \quad \lim_{x\to a} \frac{1}{x^n} = \frac{1}{a^n}. \qquad (8)$$

Exemplo 6. Dados $a,b,c,\alpha \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$, calcule

$$\lim_{x\to\alpha} (ax^2 + bx + c).$$

Solução. Aplicando (5) e a primeira parte de (8), obtemos

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\alpha} (ax^2 + bx + c) &= \lim_{x\to\alpha} ax^2 + \lim_{x\to\alpha} bx + c \\ &= a \lim_{x\to\alpha} x^2 + b \lim_{x\to\alpha} x + c \\ &= a\alpha^2 + b\alpha + c.\end{aligned}$$

□

Exemplo 7. Calcule $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-3x^2+2}{x^2-1}$.

Solução. Observemos inicialmente que 1 é raiz do numerador e do denominador, com $x^3-3x^2+2 = (x-1)(x^2-2x-2)$ e $x^2-1 = (x-1)(x+1)$. Assim, para $x \neq 1$, temos

$$\frac{x^3-3x^2+2}{x^2-1} = \frac{\cancel{(x-1)}(x^2-2x-2)}{\cancel{(x-1)}(x+1)} = \frac{x^2-2x-2}{x+1}.$$

Agora, segue do exemplo anterior e do item (b) da Proposição 5 que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x-2}{x+1} &= \frac{\lim_{x\to 1}(x^2-2x-2)}{\lim_{x\to 1}(x+1)} \\ &= \frac{1^2-2\cdot 1-2}{1+1} = -\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

□

Exemplo 8. Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo, $a \in I$ e $f : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ uma função dada, com $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$. Se $\ell > 0$, o lema de permanência do sinal garante que, diminuindo o intervalo I, se necessário, podemos supor que $f(x) > 0$ para $x \in I\setminus\{a\}$. Neste caso, dado $n \in \mathbb{N}$, é possível mostrarmos que o limite

$$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)}$$

existe. Assumindo este fato, calcule o limite acima em termos de ℓ.

Solução. Sejam $F : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ a função dada por $F(x) = \sqrt[n]{f(x)}$ e $L = \lim_{x\to a} F(x)$. Uma vez que $F(x)^n = f(x)$, aplicando (7) (com F no lugar de f), temos

$$\ell = \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} F(x)^n = L^n.$$

Então,

$$L = \sqrt[n]{\ell}.$$

$\square$

Dicas para o Professor

O material desta aula pode ser coberto em dois encontros de 50 minutos cada.

No primeiro encontro, revise o conceito de limite, discutindo os dois primeiros exemplos, a Proposição 3 e o lema de permanência do sinal. No segundo, aborde o restante do material.

Havendo disponibilidade de tempo, apresente mais exemplos simples aos alunos e dê tempo para que eles os resolvam. O objetivo, aqui, é fazê-los internalizar as regras operatórias com limites que discutimos. As referências a seguir podem lhe auxiliar na seleção desses exemplos, bem como de outros de maior calibre.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Fundamentos de Cálculo*. Coleção Profmat. Editora S.B.M., Rio de Janeiro, 2015.

2. G. B. Thomas, et. al. *Cálculo*, vol.1. Pearson, São Paulo, 2014.