Material Teórico - Módulo de Divisibilidade

MDC e MMC - Parte 1

Sexto Ano

Autor: Prof. Angelo Papa Neto
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

1 Máximo divisor comum

Nesta aula, estudaremos métodos para calcular o máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum de números naturais, bem como algumas de suas propriedades. Vamos começar estudando o máximo divisor comum.

Consideremos os números naturais $a_1, \ldots, a_m$ e suponhamos que esses números não sejam todos nulos, ou seja, que há entre eles pelo menos um que seja diferente de zero. O **máximo divisor comum (MDC)** dos números naturais $a_1, \ldots, a_m$ é o maior número natural d que divide todos esses números.

Exigir que d seja máximo significa que, se g é um número natural que também divide todos os números $a_1, \ldots, a_m$, então $g \leq d$. Se g também for máximo, então $g \leq d$ e $d \leq g$, ou seja, $g = d$. Logo, existe um único MDC de $a_1, \ldots, a_m$, que é denotado por $\operatorname{mdc}(a_1, \ldots, a_m)$.

Como já vimos na aula 4, se n é um número natural não nulo, o conjunto $D(n)$, formado pelos números naturais que dividem n, é finito.

Se $a_1, \ldots, a_m$ são números naturais não todos nulos, então os elementos do conjunto $D(a_1) \cap \cdots \cap D(a_m)$ são os divisores comuns de $a_1, \ldots, a_m$. Em particular,

$$\operatorname{mdc}(a_1, \ldots, a_m) = \max(D(a_1) \cap \cdots \cap D(a_m)),$$

onde $\max(D(a_1) \cap \cdots \cap D(a_m))$ denota o maior elemento do conjunto $D(a_1) \cap \cdots \cap D(a_m)$.

A razão pela qual exigimos que os números $a_1, \ldots, a_m$ não sejam todos nulos é que, como todo número natural divide zero, $D(0) = \mathbb{N}$. Logo, se todos os números $a_1, \ldots, a_m$ forem iguais a zero, $D(a_1) \cap \cdots \cap D(a_m) = \mathbb{N}$, que não possui um maior elemento.

Exemplo 1. *Os números* $12, 18$ *e* 30 *têm conjuntos de divisores respectivamente iguais a*

$$D(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\},$$

$$D(18) = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\} \text{ e}$$

$$D(30) = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}.$$

A interseção $D(12) \cap D(18) \cap D(30) = \{1, 2, 3, 6\}$ *é formada pelos números naturais que são divisores comuns de* $12, 18$ *e* 30*. O maior elemento de* $D(12) \cap D(18) \cap D(30)$ *é, portanto, o maior divisor comum de* $12, 18$ *e* 30*, isto é,* $\operatorname{mdc}(12, 18, 30) = 6$.

A seguir, exibiremos alguns métodos para calcular o MDC de números naturais.

Primeiro método: listagem de divisores, consiste no que já foi feito no exemplo 1. Listamos os divisores de cada número e procuramos o maior dentre os divisores comuns a todos. Esse método não será eficaz se os números dados tiverem muitos divisores. O objetivo do exemplo a seguir é ilustrar o quão difícil a aplicação desse método pode ficar se considerarmos números com muitos divisores.

Exemplo 2. *Vamos calcular o MDC entre* 13650 *e* 27720 *usando o método da listagem de divisores.*

$$D(13650) = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 13, 14, 15, 21, 25, 26, 30, 35, 39,$$
$$42, 50, 65, 70, 75, 78, 91, 105, 130, 150, 175, 182, 195, 210, 273,$$
$$325, 350, 390, 455, 525, 546, 650, 910, 975, 1050, 1365, 1950,$$
$$2275, 2730, 4550, 6825, 13650\}.$$

$$D(27720) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 18, 20, 21,$$
$$22, 24, 28, 30, 33, 35, 36, 40, 42, 44, 45, 55, 56, 60, 63, 66, 70, 72,$$
$$77, 84, 88, 90, 99, 105, 110, 120, 126, 132, 140, 154, 165, 168, 180,$$
$$198, 210, 220, 231, 252, 264, 280, 308, 315, 330, 360, 385, 396,$$
$$420, 440, 462, 495, 504, 616, 630, 660, 693, 770, 792, 840, 924,$$
$$990, 1155, 1260, 1320, 1386, 1540, 1848, 1980, 2310, 2520, 2772,$$
$$3080, 3465, 3960, 4620, 5544, 6930, 9240, 13860, 27720\}.$$

Os números 13650 *e* 27720 *têm, respectivamente,* 48 *e* 96 *divisores. Os divisores comuns desses dois números são*

$$D(13650) \cap D(27720) =$$
$$= \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14, 15, 21, 30, 35, 42, 70, 105, 210\}.$$

Logo,

$$\operatorname{mdc}(13650, 27720) = \max(D(13650) \cap D(27720)) = 210.$$

Segundo método: divisões sucessivas. Esse método, também conhecido como **algoritmo de Euclides**, pode ser aplicado para o cálculo do MDC entre dois números naturais. Mais adiante veremos que, aplicando-o várias vezes, também é possível usá-lo para o cálculo do MDC de mais de dois números. O método se baseia nas duas observações a seguir.

Observação 3. *Se* a *e* b *são números naturais, com* $b \neq 0$ *e* r *é o resto da divisão de* a *por* b*, então*

$$\operatorname{mdc}(a, b) = \operatorname{mdc}(b, r). \tag{1}$$

Observação 4. *Se* $b \neq 0$*, então*

$$\operatorname{mdc}(b, 0) = b. \tag{2}$$

O método consiste nos seguintes passos:

1. Se os dois números são iguais a zero, o MDC não existe.
2. Se um dos números for igual a zero, o MDC será o outro número.
3. Se os dois números são diferentes de zero, mas são iguais, o MDC será qualquer um dos dois.
4. Se os dois números são diferentes de zero e diferentes um do outro, divida o maior pelo menor.
5. Se o resto da divisão for igual a zero, o MDC é o menor dos números.
6. Se o resto da divisão for diferente de zero, retorne ao passo 4, substituindo o maior número pelo menor e o menor número pelo resto.
7. Repita os passos 4,5 e 6 até o resto da divisão seja igual a zero.

Geralmente usamos uma grade como a ilustrada abaixo para fazermos as divisões sucessivas.

(3)

Vamos explicar como é o preenchimento da grade (3) aplicando o algoritmo descrito acima a um exemplo.

Exemplo 5. *Vamos calcular novamente o MDC do exemplo 2, usando agora o algoritmo de Euclides. De início, colocamos os dois números na linha do meio da grade, sendo maior número* (27720) *colocado na primeira casa à esquerda e o menor número* (13650) *colocado na segunda casa, ao lado do maior número.*

27720	13650		

(4)

Na linha superior colocaremos os quocientes e na linha inferior coolocaremos os restos de todas as divisões sucessivas que faremos. Dividindo 27720 *por* 13650*, obtemos quociente igual a* 1 *e resto igual a* 420*. Colocamos o quociente logo acima do menor número* (13650) *e o resto logo abaixo do maior número* (27720)*:*

	1		
27720	13650		
420			

(5)

O resto da primeira divisão deve ser colocado ao lado do divisor da primeira divisão, no nosso caso, 13650*.*

	1		
27720	13650	420	
420			

(6)

O processo é repetido, dividindo-se agora 13650 *por* 420*, o que fornece quociente* 32 *e resto* 210*.*

	1	32	
27720	13650	420	
420	210		

(7)

O resto 210 *é colocado à direita do divisor da divisão anterior:* 420*.*

	1	32	
27720	13650	420	210
420	210		

(8)

A divisão de 420 *por* 210 *é exata, o que interrompe o algoritmo:*

	1	32	2
27720	13650	420	210
420	210	0	

(9)

Portanto, o MDC entre 27720 *e* 13650 *é igual a* 210*.*

Terceiro método: decomposição em fatores primos. Sejam $a_1, \ldots, a_n$ números naturais diferentes de zero. Se um deles for igual a 1, o MDC de todos esses números será também igual a 1. Caso contrário, podemos escrever cada um deles como produto de primos:

$$a_i = p_1^{r_1} \cdots p_\ell^{r_\ell}, \tag{10}$$

Com as fatorações de $a_1, \ldots, a_n$ à disposição, é possível calcular $\operatorname{mdc}(a_1, \ldots, a_n)$ da seguinte forma:

Seja p um número primo que divide $a_1, \ldots, a_n$ simultaneamente. Seja p^{s_1} a maior potência de p que divide a_1, seja p^{s_2} a maior potência de p que divide a_2, assim por diante. Seja $t = \min\{s_1, \ldots, s_n\}$ o mínimo de $s_1, l \ldots, s_n$. Então p divide o MDC de a e b e p^t é a maior potência de p que divide esse MDC. O produto de todas as potências p^t, com p e t dados como acima, é igual a $\operatorname{mdc}(a, b)$.

Observação 6. *Se não existir um primo p que divida todos os números $a_1, \ldots, a_n$ então esses números não têm fatores em comum além de 1, logo $D(a_1) \cap \cdots \cap D(a_n) = \{1\}$ e* $\operatorname{mdc}(a_1, \ldots, a_n) = 1$.

Exemplo 7. *Novamente, vamos calcular* $\operatorname{mdc}(13650, 27720)$ *usando agora o método da decomposição em fatores primos. Fatorando os dois números obtemos:*

$$13650 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 13,$$

$$27720 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11.$$

Os primos que dividem simultaneamente os dois números dados são $2, 3, 5$ *e* 7*. O primo* 2 *aparece com expoente* 1 *na decomposição de* 13650 *e com expoente* 3 *na decomposição de* 27720*. Devemos escolher o menor expoente, portanto*

$2^1 = 2$ *é o fator de* $\text{mdc}\,(13650, 27720)$ *que é potência de* 2. *Fazendo o mesmo para os outros primos que dividem* 13650 *e* 27720 *simutaneamente, obtemos*

$$\text{mdc}\,(13650, 27720) = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210.$$

Vamos exibir alguns exemplos onde devemos calcular o MDC de mais de dois números.

Exemplos 8. (1) *Vamos calcular* $\text{mdc}\,(490, 845, 1001)$ *usando o terceiro método. Primeiro, fatoramos os três números:* $490 = 2{\cdot}5{\cdot}7^2$, $845 = 5{\cdot}13^2$ *e* $1001 = 7{\cdot}11{\cdot}13$. *Como não há primos que dividam* $490, 845$ *e* 1001 *ao mesmo tempo,* $\text{mdc}\,(490, 845, 1001) = 1$. *Observe que* $\text{mdc}\,(490, 845) = 5$, $\text{mdc}\,(845, 1001) = 13$ *e* $\text{mdc}\,(490, 1001) = 7$.

(2) *Novamente pelo terceiro método, vamos calcular* $\text{mdc}\,(700, 770, 1470)$. *Fatorando os números, encontramos* $700 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7$, $770 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ *e* $1470 = 2{\cdot}3{\cdot}5{\cdot}7^2$. *Assim,* $\text{mdc}\,(700, 770, 1470) = 2{\cdot}5{\cdot}7 = 70$.

2 Propriedades do MDC

Nesta seção, vamos apresentar algumas propriedades que facilitam o cálculo do MDC de dois ou mais números. Vamos começar com uma caracterização de números primos entre si.

Lembremos que dois números naturais a e b são chamados **primos entre si** ou **relativamente primos** se o único divisor comum de a e b é o número 1. Temos, então,

> Dois números naturais a e b são primos entre si se, e somente se, $\text{mdc}\,(a, b) = 1$.

Os números naturais $a_1, \ldots, a_n$ são chamados **dois a dois primos entre si** quando, para cada dois números distintos a_i e a_j da lista, $\text{mdc}\,(a_i, a_j) = 1$. Eles são chamados **primos entre si** quando o único divisor comum de todos os números $a_1, \ldots, a_n$ é o número 1. Temos o seguinte:

> Se os números naturais $a_1, \ldots, a_n$ são dois a dois primos entre si, então eles são primos entre si, mas não vale a recíproca, isto é, $a_1, \ldots, a_n$ podem ser primos entre si sem serem dois a dois primos entre si.

De fato, supondo que $a_1, \ldots, a_n$ são dois a dois primos entre si, se d divide todos os números $a_1, \ldots, a_n$, então d divide dois quaisquer desses números, logo $d = 1$ pois o MDC entre dois quaisquer desses números é igual a 1. O exemplo 8 (1) mostra que não vale a recíproca.

> Se o menor dos números naturais $a_1, \ldots, a_n$ divide os outros, então esse menor número é igual ao MDC de $a_1, \ldots, a_n$.

De fato, como esse menor elemento divide todos os outros e divide ele mesmo, ele é um divisor comum de todos os números da lista. Ele é o maior divisor comum pois é o maior número que divide ele mesmo.

Exemplos 9. (1) $\text{mdc}\,(3, 9, 18) = 3$.

(2) $\text{mdc}\,(15, 60, 180) = 15$.

(3) *O MDC de números pares é um número par. Em particular, números pares nunca são primos entre si.*

> Sejam $k, a_1, \ldots, a_n$ números naturais não nulos. Então
>
> $$\text{mdc}\,(ka_1, \ldots, ka_n) = k \cdot \text{mdc}\,(a_1, \ldots, a_n).$$

Para justificar esse fato, seja d um divisor de k e seja g um divisor comum de $a_1, \ldots, a_n$. Então dg é um divisor comum de $ka_1, \ldots, ka_n$. Fazendo $d = k$ vemos que kg é um divisor comum de $ka_1, \ldots, ka_n$. Em particular, se ℓ é o MDC de $a_1, \ldots, a_n$, então $k\ell$ é o MDC de $ka_1, \ldots, ka_n$.

Exemplo 10. $\text{mdc}\,(340, 255, 323) = 17 \cdot \text{mdc}\,(20, 15, 13) = 17 \cdot 1 = 17$.

> Sejam a e b números naturais diferentes de zero. Então o MDC de a e b pode ser escrito de uma das seguintes maneiras, com m e n naturais:
>
> $$\begin{aligned} \text{mdc}\,(a, b) &= ma + nb, \\ \text{mdc}\,(a, b) &= ma - nb, \qquad (11) \\ \text{mdc}\,(a, b) &= nb - ma. \end{aligned}$$

Os números m e n podem ser encontrados a partir do algoritmo de Euclides, como faremos no exemplo a seguir.

Exemplo 11. *Vamos escrever* $\text{mdc}\,(210, 119) = 7$ *como em (11). Para isso precisamos encontrar* m *e* n *adequados. As divisões sucessivas que, pelo algoritmo de Euclides, determinam o MDC podem ser escritas como*

$$210 = 119 \cdot 1 + 91 \Rightarrow 91 = 210 - 119,$$

$$119 = 91 \cdot 1 + 28 \Rightarrow 28 = 119 - 91,$$

$$91 = 28 \cdot 3 + 7 \Rightarrow 7 = 91 - 3 \cdot 28.$$

Assim, $7 = 91 - 3{\cdot}28 = 91 - 3{\cdot}(119 - 91) = 4{\cdot}91 - 3{\cdot}119 = 4 \cdot (210 - 119) - 3 \cdot 119 = 4 \cdot 210 - 7 \cdot 119$.

A propriedade acima nos permite concluir que os divisores comuns de a e b são também divisores de $\text{mdc}\,(a, b)$, ou seja, o conjunto $D(a) \cap D(b)$ é formado pelos divisores de $\text{mdc}\,(a, b)$.

> Se a e b são inteiros não nulos, e d divide a e b, então d divide $\text{mdc}\,(a, b)$.

De fato, se d divide a e b, podemos escrever $a = dk$ e bq, com k e q naturais. Se $\text{mdc}\,(a, b) = ma + nb$, então $\text{mdc}\,(a, b) = mdk + ndq = d(mk + nq)$, logo d divide $\text{mdc}\,(a, b)$. Os outros dois casos são similares.

Sejam a, b e c números naturais diferentes de zero. Então

$$\text{mdc}\,(a, b, c) = \text{mdc}\,(\,\text{mdc}\,(a, b), c).$$

Chamando $\text{mdc}\,(a, b) = d$, $\text{mdc}\,(a, b, c) = g$ e $\text{mdc}\,(\,\text{mdc}\,(a, b), c) = g'$, temos que g' divide c e d. Como d divide a e b, temos que g' divide a, b e c, logo $g' \leq g$. Por outro lado, g divide a, b e c, em particular, g divide a e b, logo g divide d. Assim, g divide d e c, donde segue que g divide g', logo $g \leq g'$. Portanto, $g' = g$.

3 Exercícios sobre MDC

Nesta seção, resolveremos alguns exercícios envolvendo a noção de MDC.

Exemplo 12. *Sabe-se que a e b são dois números naturais não nulos tais que $mdc(a, b) = 7$. A grade de divisões sucessivas é dada abaixo.*

	2	1	3	
a	b		11	
		0		

(12)

Determinar a e b.

Solução: a ideia é preencher a grade da direita para a esquerda, ou seja, no sentido contrário àquele que seguimos quando queremos calcular o MDC de dois números dados.

O número que aparece na linha do meio, entre b e 11 é igual a $11 \cdot 3 + 0 = 33$. Assim, obtemos

	2	1	3	
a	b	33	11	
		0		

(13)

Novamente aplicando o algoritmo da direita para a esquerda, vemos que $b = 33 \cdot 1 + 11 = 44$. Finalmente, $a = 44 \cdot 2 + 33 = 88 + 33 = 121$.

Exemplo 13. *Dona Maria presenteou as crianças de sua rua com 160 pirulitos, 198 caramelos e 370 chocolates, que ela colocou em sacolas de modo que cada sacola contivesse um único tipo de doce, que a quantidade de doces em cada sacola fosse sempre a mesma e de modo que cada sacola contivesse a maior quantidade possível de doces. Depois de colocar os doces nas sacolas, Dona Maria percebeu que sobraram 7 pirulitos, 11 caramelos e 13 chocolates. Quantas sacolas Dona Maria fez?*

Solução: seja d o número máximo de doces que Dona Maria deve colocar em cada sacola. Se p, k e c indicam respectivamente os números de sacolas com pirulitos, caramelos e chocolates, então

$$160 = pd + 7,$$

$$198 = kd + 11,$$

$$370 = cd + 13.$$

Assim, $pd = 153$, $kd = 187$ e $cd = 357$. Assim, d é o maior número que divide $153, 187$ e 357, ou seja, $d = \text{mdc}\,(153, 187, 357)$. Aplicando o algoritmo de Euclides para 153 e 187, vemos que

	1	4	2	
187	153	34	17	
34	17	0		

(14)

Logo, $\text{mdc}\,(187, 153) = 17$. Assim, $\text{mdc}\,(153, 187, 357) = \text{mdc}\,(17, 357) = 17$, pois $357 = 17 \cdot 21$.

De posse do número $d = 17$ de doces em cada sacola, calculamos $p = 153/17 = 9$, $k = 187/17 = 11$ e $c = 357/17 = 21$. Portanto, Dona Maria fez 9 sacolas com pirulitos, 11 sacolas com caramelos e 21 sacolas com chocolates, e cada sacola tinha 17 doces.

Exemplo 14. *O MDC de dois números naturais é 10 e o maior deles é 120. Determine o maior valor possível para o outro número.*

Solução: seja n o número a ser determinado. Como $\text{mdc}\,(120, n) = 10$, temos que $n = 10k$ e $k \in \mathbb{N}$. Substituindo n por $10k$ obtemos $\text{mdc}\,(120, 10k) = 10$, ou seja, $10 \cdot \text{mdc}\,(12, k) = 10$, donde $\text{mdc}\,(12, k) = 1$. Como $10k < 120$, temos que $k < 12$. A condição $\text{mdc}\,(12, k) = 1$ força k a ser diferente de $2, 3, 4, 6, 8, 9$ e 10. Assim, as únicas possibilidades para k são $k \in \{1, 5, 7, 11\}$, logo $10k \in \{10, 50, 70, 110\}$ e desses valores o maior é 110. Portanto, o maior valor possível para o outro número é 110.

Exemplo 15. *Dividindo-se dois números naturais pelo seu MDC, a soma dos quocientes obtidos é igual a 8. Determine esses números sabendo que sua soma é 384,*

Solução: sejam a e b os números procurados e $d = \text{mdc}\,(a, b)$. Podemos escrever $a = dk$ e $b = dq$, onde k e q são os quocientes das divisões de a e b por d. Sabemos que $k + q = 8$ e que $a + b = 384$. Logo, $dk + dq = 384$, isto é, $d(k + q) = 384$. Como $k + q = 8$, $d = 384/8 = 48$.

Uma vez que $d = \text{mdc}\,(a, b) = \text{mdc}\,(dk, dq) = d \cdot \text{mdc}\,(k, q)$, temos que $\text{mdc}\,(k, q) = 1$. Os números naturais primos entre si cuja soma é 8 são 1 e 7 ou 3 e 5. No primeiro caso, temos $a = 1 \cdot 48 = 48$ e $b = 7 \cdot 48 = 336$. No segundo caso, temos $a = 3 \cdot 48 = 144$ e $b = 5 \cdot 48 = 240$. É claro que há também a possibilidade de $a = 336$ e $b = 48$ ou $a = 240$ e $b = 144$.

Dicas para o Professor

O assunto dessa aula pode ser desenvolvido em dois encontros de 50 minutos cada. Você deve trabalhar a maior quantidade possível de exemplos com os alunos para que eles fixem os diferentes métodos para o cálculo do MDC.

A propriedade de que o MDC de dois números pode ser escrito como combinação desses dois números (conhecida como Teorema de Bachet-Bézout) tem uma grande importância teórica e é fundamental para a resolução de equações diofantinas lineares.

Os exemplos envolvendo números com uma grande quantidade de divisores servem para comparar os diferentes métodos para o cálculo do MDC. Uma comparação entre a eficiência dos três métodos pode parecer indicar que o terceiro método é o mais eficiente. No entanto, como esse método depende da fatoração em primos ele não é computacionalmente viável para números muito grandes. O método mais eficaz, do ponto de vista computacional, é o segundo (algoritmo de Euclides). É notável que esse algoritmo já seja conhecido desde a antiguidade. Ele aparece no livro VII dos *Elementos* de Euclides.

É uma boa ideia estimular os alunos a testarem os algoritmos para números grandes, possivelmente com o auxílio de calculadoras ou de um computador.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 5: Teoria dos Números.* Rio de Janeiro, Editora S.B.M., 2012.

2. E. de Alencar Filho. *Teoria Elementar dos Números.* São Paulo, Nobel, 1989.

3. J.P. de Oliveira Santos. *Introdução à Teoria dos Números.* Rio de Janeiro, Editora IMPA, 1998.