

# Material Teórico - Desigualdades Elementares Parte 1

## Desigualdades Elementares

### Tópicos Adicionais

**Autor: Prof. Ulisses Lima Parente**

**Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto**

**27 de julho de 2019**



PORTAL DA  
MATEMÁTICA  
OBMEP

# 1 Desigualdades elementares

Ao longo deste material, apresentaremos algumas desigualdades elementares. Para mostrar a validade das mesmas, nosso ponto de partida é o fato de que o quadrado de qualquer número real é maior do que ou igual a zero, sendo igual a zero se, e somente se, o número em questão também for igual a zero. Vejamos alguns exemplos:

**Exemplo 1.** Mostre que se  $x$  é um número real positivo, então

$$x + \frac{1}{x} \geq 2. \quad (1)$$

Além disso, vale a igualdade  $x + \frac{1}{x} = 2$  se, e somente se,  $x = 1$ .

**Prova.** Temos que

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{x} \geq 2 &\iff x - 2 + \frac{1}{x} \geq 0 \\ &\iff \left(x - 2 + \frac{1}{x}\right) \cdot x \geq 0 \cdot x \\ &\iff x^2 - 2x + 1 \geq 0 \\ &\iff (x - 1)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

A última desigualdade acima é claramente verdadeira, uma vez que o quadrado de qualquer número real é maior do que ou igual a zero. Portanto, obtemos  $x + \frac{1}{x} \geq 2$ .

Agora, é óbvio que se  $x = 1$ , então  $x + \frac{1}{x} = 2$ . Por outro lado, se  $x + \frac{1}{x} = 2$ , então, fazendo manipulações algébricas parecidas com as que fizemos acima, chegamos à equação  $(x - 1)^2 = 0$ , o que acarreta  $x = 1$ .  $\square$

**Exemplo 2.** Mostre que se  $a$  e  $b$  são números reais positivos, então

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2. \quad (2)$$

Além disso, vale a igualdade se, e somente se,  $a = b$ .

**Prova.** Como  $a > 0$  e  $b > 0$ , temos que  $ab > 0$  e, assim,

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 &\iff \frac{a}{b} - 2 + \frac{b}{a} \geq 0 \\ &\iff \left(\frac{a}{b} - 2 + \frac{b}{a}\right) \cdot ab \geq 0 \cdot ab \\ &\iff \left(\frac{a^2 - 2ab + b^2}{ab}\right) \cdot ab \geq 0 \\ &\iff a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \\ &\iff (a - b)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Uma vez que  $(a - b)^2 \geq 0$  é uma desigualdade verdadeira, concluímos que  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$  também é verdadeira.

Para a igualdade, é imediato verificar (novamente com o auxílio dos cálculos acima) que

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 2 \iff (a - b)^2 = 0 \iff a = b.$$

Portanto, a igualdade em (??) ocorre se, e somente se,  $a = b$ .  $\square$

Veja que a prova da validade da desigualdade (??) é análoga à prova da validade da desigualdade (??). De fato, é interessante observar que podemos obter a desigualdade (??) como consequência de (??). Para tanto, fazendo  $x = \frac{a}{b}$  em (??), temos que  $\frac{1}{x} = \frac{b}{a}$ , logo,

$$x + \frac{1}{x} \geq 2 \implies \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2.$$

A condição para a igualdade também segue daquela para (??), uma vez que, com  $x = \frac{a}{b}$ ,

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 2 &\implies x + \frac{1}{x} = 2 \implies x = 1 \\ &\implies \frac{a}{b} = 1 \implies a = b. \end{aligned}$$

**Exemplo 3.** Mostre que se  $a$  e  $b$  são números reais positivos, então

$$(a + b) \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4. \quad (3)$$

Além disso, vale a igualdade se, e somente se,  $a = b$ .

**Prova.** Temos que

$$\begin{aligned} (a + b) \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) &= \frac{a}{a} + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{b}{b} \\ &= 1 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1 \\ &= 2 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a}. \end{aligned}$$

Agora, de (??) e dos cálculos acima, segue que

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 &\iff 2 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 + 2 \\ &\iff (a + b) \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4. \end{aligned}$$

Por fim, note que vale a igualdade em (??) se, e somente se,

$$2 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 4,$$

ou seja,

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 2.$$

Por sua vez, essa última igualdade ocorre se, e somente se,  $a = b$ .  $\square$

O exemplo anterior pode ser generalizado pelo seguinte resultado:

**Proposição 4.** Sejam  $a_1, a_2, \dots, a_n$  números reais positivos. Então

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j}\right) \geq n^2, \quad (4)$$

valendo a igualdade se, e somente se,  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ .

**Prova.** Iniciamos desenvolvendo o produto

$$P = \left( \sum_{i=1}^n a_i \right) \cdot \left( \sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j} \right),$$

temos

$$\begin{aligned} P &= (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^n \frac{a_i}{a_j} = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{a_i} + \sum_{n \geq i > j \geq 1} \left( \frac{a_i}{a_j} + \frac{a_j}{a_i} \right) \\ &= n + \sum_{n \geq i > j \geq 1} \left( \frac{a_i}{a_j} + \frac{a_j}{a_i} \right). \end{aligned}$$

Agora, veja que o número de parcelas do tipo  $\frac{a_i}{a_j} + \frac{a_j}{a_i}$ , com  $n \geq i > j \geq 1$ , corresponde ao número de modos de escolhermos um subconjunto de dois elementos do conjunto  $\{1, 2, \dots, n\}$  (pois, uma vez escolhido um tal subconjunto, seu menor elemento será  $j$  e seu maior elemento será  $i$ ). Portanto, há  $\binom{n}{2}$  parcelas do tipo descrito acima.

Conforme vimos no exemplo ??, cada uma dessas parcelas é maior do que ou igual a 2. Logo,

$$\begin{aligned} P &= n + \sum_{n \geq i > j \geq 1} \left( \frac{a_i}{a_j} + \frac{a_j}{a_i} \right) \\ &\geq n + \binom{n}{2} \cdot 2 \\ &= n + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 \\ &= n + (n^2 - n) \\ &= n^2. \end{aligned}$$

Agora, se vale a igualdade em (??), então

$$n + \sum_{n \geq i > j \geq 1} \left( \frac{a_i}{a_j} + \frac{a_j}{a_i} \right) = n + \binom{n}{2} \cdot 2,$$

o que implica

$$\sum_{n \geq i > j \geq 1} \left( \frac{a_i}{a_j} + \frac{a_j}{a_i} - 2 \right) = 0.$$

No primeiro membro da igualdade acima, cada parcela é não negativa. Portanto, a única maneira da soma ser igual a zero é se cada uma das parcelas for igual a 0, isto é, se

$$\frac{a_i}{a_j} + \frac{a_j}{a_i} - 2 = 0.$$

Então, a condição para a igualdade no exemplo ?? garante que  $a_i = a_j$ , para todos  $n \geq i > j \geq 1$ , e isso é o mesmo que  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ .  $\square$

**Exemplo 5.** Prove que se  $a$  e  $b$  são números reais não nulos, então

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq \frac{2}{ab}. \quad (5)$$

Além disso, vale a igualdade se, e somente se,  $a = b$ .

**Prova.** Veja que

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq \frac{2}{ab} &\iff \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \cdot a^2 b^2 \geq \frac{2}{ab} \cdot a^2 b^2 \\ &\iff \frac{a^2 b^2}{a^2} + \frac{a^2 b^2}{b^2} \geq \frac{2a^2 b^2}{ab} \\ &\iff a^2 + b^2 \geq 2ab \\ &\iff a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \\ &\iff (a - b)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Logo, a desigualdade (??) é verdadeira para quaisquer números reais  $a$  e  $b$  não nulos e vale a igualdade se, e somente se,  $a = b$ .  $\square$

**Exemplo 6.** Sejam  $a, b$  e  $c$  números reais positivos. Prove que

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc. \quad (6)$$

Além disso, vale a igualdade se, e somente se,  $a = b = c$ .

**Solução.** Temos que

$$(a - b)^2 \geq 0 \iff a^2 + b^2 \geq 2ab,$$

$$(a - c)^2 \geq 0 \iff a^2 + c^2 \geq 2ac$$

e

$$(b - c)^2 \geq 0 \iff b^2 + c^2 \geq 2bc.$$

Somando membro a membro as desigualdades acima, obtemos

$$(a^2 + b^2) + (a^2 + c^2) + (b^2 + c^2) \geq 2ab + 2ac + 2bc$$

ou, o que é o mesmo,

$$2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(ab + ac + bc).$$

Portanto,

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc.$$

Agora, se vale a igualdade em (??), então podemos essencialmente repetir os cálculos acima, da seguinte forma:

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$$

$$\iff 2(a^2 + b^2 + c^2) = 2(ab + ac + bc)$$

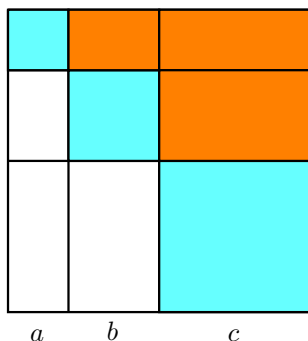
$$\iff 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 = 2ab + 2ac + 2bc$$

$$\iff (a^2 - 2ab + b^2) + (a^2 - 2ac + c^2) + (b^2 - 2bc + c^2) = 0$$

$$\iff (a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2 = 0.$$

Como na demonstração da Proposição ??, a única possibilidade para uma soma de parcelas não negativas dar resultado 0 é se todas as parcelas forem iguais a 0. Assim, a igualdade acontece se, e somente se,  $a = b = c$ .  $\square$

Podemos dar uma interpretação geométrica interessante para o exemplo ???. Para tanto, considere o quadrado de lado  $a + b + c$  desenhado abaixo.



A soma das áreas dos quadrados azuis é  $a^2 + b^2 + c^2$ , ao passo que a soma das áreas dos retângulos laranjas é  $ab + ac + bc$ . Assim, a medida da área pintada de azul é maior do que ou igual à medida da área pintada de laranja.

Voltando ao desenvolvimento da teoria, expandindo o quadrado no lado esquerdo da desigualdade  $(a - b)^2 \geq 0$ , obtemos:

$$\begin{aligned} (a - b)^2 \geq 0 &\iff a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \\ &\iff a^2 + b^2 \geq 2ab \\ &\iff \frac{a^2 + b^2}{2} \geq ab, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{a^2 + b^2}{2} \geq ab, \quad (7)$$

valendo a igualdade se, e somente se,  $a = b$ .

Agora, se  $x$  e  $y$  são números reais positivos, então, fazendo  $a = \sqrt{x}$  e  $b = \sqrt{y}$  em (7), obtemos

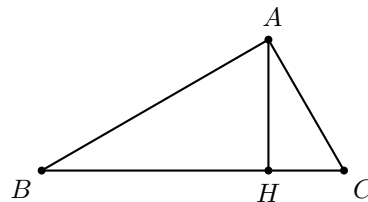
$$\frac{(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2}{2} \geq \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{x + y}{2} \geq \sqrt{xy}. \quad (8)$$

Na última desigualdade acima,  $\frac{x+y}{2}$  é a **média aritmética** e  $\sqrt{xy}$  é a **média geométrica** dos reais positivos  $x$  e  $y$ . Assim, ela é um caso particular da **desigualdade entre as médias aritmética e geométrica** (também conhecida simplesmente como a **desigualdade entre as médias**).

O nome *média geométrica* dado a  $\sqrt{xy}$  vem do seguinte fato (acompanhe na próxima figura): se  $ABC$  é um triângulo retângulo em  $A$ , com altura  $AH$  relativa à hipotenusa  $BC$ , tal que  $BH = x$  e  $CH = y$ , então  $AH = \sqrt{xy}$ . Verifique esse fato e veja como, a partir dele, podemos dar uma demonstração *geométrica* de (8).



Podemos mostrar facilmente que (7) e (8) são equivalentes a (8), no sentido de que, a partir de (7) ou (8), podemos obter (8), e vice-versa. Sugerimos ao leitor demonstrar tais equivalências como exercício.

Nas próximas partes dessa aula, discutiremos o caso geral da desigualdade entre as médias e faremos algumas aplicações.

## Dicas para o Professor

Sugerimos que sejam utilizadas duas sessões de 50min para discutir todo o conteúdo presente neste material. É importante que o professor mostre cada uma das desigualdades apresentadas com todos os detalhes, sempre ressaltando o argumento utilizado: o quadrado de um número real é maior do que ou igual a zero, sendo igual a zero se, e somente se, o número em questão for igual a zero. Além disso, reobtenha as desigualdades apresentadas utilizando a desigualdade entre as médias. Este tipo de exercício é importante para que os alunos se acostumem a utilizar essa desigualdade como ferramenta.

## Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 1: Números Reais*. Rio de Janeiro, SBM, 2013.
2. Paulo Cezar Carvalho e Augusto César Morgado. *Matemática Discreta*. Rio de Janeiro, SBM, 2015.