Material Teórico - Números Inteiros e Números Racionais

Exercícios sobre Operações com Números Inteiros

Sétimo Ano

Prof. Angelo Papa Neto

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Nesta aula vamos apresentar alguns exercícios sobre operações com inteiros.

Exemplo 1 (Banco de questões OBMEP - 2010). *Complete os quadradinhos com os números* $1, 2, 3, 5$ *e* 6.

$$(\square + \square - \square) \times \square \div \square = 4.$$

Solução. A configuração $(\square + \square - \square) \times \square \div \square = 4$ é equivalente a $(\square + \square - \square) \times \square = 4 \times \square$. Como os números que podem ser colocados nos quadradinhos são todos inteiros, concluímos que o lado esquerdo da última igualdade tem que ser múltiplo de 4.

Com os números disponíveis, as únicas possibilidades são $(\square + \square - \square) \times \boxed{2} = 4 \times \boxed{1}$ ou $(\square + \square - \square) \times \boxed{1} = 4 \times \boxed{2}$. Assim, as únicas configurações possíveis são

$$\left(\boxed{3} + \boxed{5} - \boxed{6}\right) \times \boxed{2} = 4 \times \boxed{1}$$

ou

$$\left(\boxed{5} + \boxed{6} - \boxed{3}\right) \times \boxed{1} = 4 \times \boxed{2}.$$

$\square$

Exemplo 2. *Considere a seguinte cadeia, onde em cada quadrado deve ser colocado um número inteiro.*

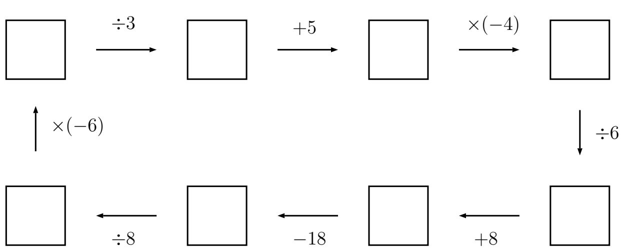

Figura 1: Uma cadeia de operações.

As setas na figura 1 indicam a operação que deve ser feita com o número situado no quadrado de onde parte a seta para que se obtenha o número situado no quadrado onde chega a seta. Determine os números que devem ser colocados nos quadrados.

Solucão. Comecemos observando que o número a ser colocado no quadrado situado no extremo superior esquerdo da figura é, necessariamente, um múltiplo de 3, pois a seta que parte desse quadrado representa uma divisão por 3 cujo resultado é um número inteiro. Pela mesma razão, o número inteiro a ser colocado no quadrado situado no extremo superior direito da figura deve ser um múltiplo de 6. Podemos fazer algumas tentativas, colocando múltiplos de 3 no quadrado situado no extremo superior esquerdo da figura.

Começando com 3, temos:

$$\begin{array}{ccccccc} 3 & \xrightarrow{\div 3} & 1 & \xrightarrow{+5} & 6 & \xrightarrow{\times(-4)} & -24 \\ &&&&&& \downarrow{\scriptstyle \div 6} \\ ?? & \xleftarrow{\div 8} & -14 & \xleftarrow{-18} & 4 & \xleftarrow{+8} & -4 \end{array}$$

o que não funciona, porque não podemos dividir -14 por 8 no conjunto dos inteiros.

Começando com 6, temos

$$6 \xrightarrow{\div 3} 2 \xrightarrow{+5} 7 \xrightarrow{\times(-4)} -28,$$

mas -28 não é múltiplo de 6.

Começando com 9, temos

$$9 \xrightarrow{\div 3} 3 \xrightarrow{+5} 8 \xrightarrow{\times(-4)} -32$$

e -32 não é múltiplo de 6.

Considerando o próximo múltiplo de 3, que é 12, obtemos

$$\begin{array}{ccccccc} 12 & \xrightarrow{\div 3} & 4 & \xrightarrow{+5} & 9 & \xrightarrow{\times(-4)} & -36 \\ \uparrow{\scriptstyle \times 6} &&&&&& \downarrow{\scriptstyle \div 6} \\ -2 & \xleftarrow{\div 8} & -16 & \xleftarrow{-18} & 2 & \xleftarrow{+8} & -6 \end{array}$$

e, nesse caso, o ciclo se fecha e todos os números que aparecem são inteiros. É possível mostrar que essa é a única solução para o problema.

$\square$

Exemplo 3 (Banco de questões OBMEP - 2010). *Cada um dos sinais* $\square, \boxplus, \boxtimes, \boxminus$ *e* $\boxdot$ *representa um número de um algarismo. Descubra quais são esses números e complete o número que falta no círculo em branco.*

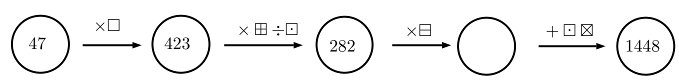

Figura 2: Sequência de operações.

Solução: Para descobrir $\square$, note que $47 \times \square = 423$ e isso implica que $\square = 423 \div 47 = 9$. Para descobrir $\boxplus$ e $\boxdot$, veja que $(423 \times \boxplus) \div \boxdot = 282$, o que é equivalente a $423 \times \boxplus = 282 \times \boxdot$. Simplificando, obtemos

$$3 \times \boxplus = 2 \times \boxdot. \tag{1}$$

Observando os três últimos círculos, vemos que o número a ser colocado no círculo vazio deverá ser um múltiplo de 282 suficientemente próximo de 1448, mas menor do que esse número, de modo que a diferença entre os dois seja um número de dois algarismos. Em particular, essa diferença é menor do que o número de três algarismos 282. Assim,

$$282 \times \boxminus + \boxdot\boxtimes = 1448$$

é a prova real da divisão de 1448 por 282, de forma que $\boxminus$ é o quociente e $\boxdot\boxtimes$ é o resto dessa divisão. Fazendo a divisão, encontramos: $\boxminus = 5$ e $\boxdot\boxtimes = 38$. Em particular, $\boxdot = 3$ e, de acordo com a igualdade (1), chegamos a $\boxplus = 2$.

Exemplo 4. *O ponto P está sobre a reta orientada e ocupa a posição indicada na figura 3.*

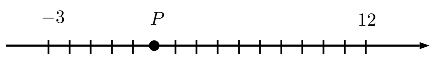

Figura 3: Um ponto sobre a reta orientada.

(a) *Determine o número inteiro que corresponde a P na reta orientada.*

(b) *O ponto A é simétrico de P em relação a -3 e o ponto B é o simétrico de P em relação a 12. Encontre a distância entre A e B.*

Solução. (a) Observando a figura 3, vemos que o número correspondente à posição do ponto P é cinco unidades maior do que o número -3. Portanto, a posição do ponto P corresponde ao número $-3+5=2$.

(b) Como são A e P são simétricos em relação a -3, a distância entre A e P é o dobro da distância entre -3 e P, que é $|-3-2| = 5$. Logo, a distância entre A e P é igual a 10. Da mesma forma, a distância entre P e B é o dobro da distância entre P e 12, isto é, é igual a $2 \times |12-2| = 20$. Assim, a distância entre A e B é igual à distância entre A e P mais a distância entre P e B, ou seja, é igual a $10+20=30$. □

Exemplo 5. *Pedro e Miguel estão brincando com números. A brincadeira consiste no seguinte: Pedro escreve um número natural qualquer n.*

(1) *Se n for par, Miguel escreve ao lado o número $n/2$;*

(2) *Se n for ímpar, Miguel escreve ao lado o número $3n+1$.*

Em seguida, Pedro faz o mesmo com o número escrito por Miguel e o processo se repete, formando uma lista de números. Por exemplo, se o primeiro número escrito por Pedro for 10, então os primeiros nove números da lista serão $10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2$. Pergunta-se:

(a) *Se, em algum momento, o número escrito por Pedro for ímpar, o número que Miguel vai escrever poderá ser ímpar?*

(b) *Se, em algum momento, Miguel (ou Pedro) escrever o número 1, algum dos dois poderá depois disso escrever o número 5? Por quê?*

(c) *Suponha que Pedro agora pode começar a brincadeira escrevendo um número negativo. Se ele escrever -5, algum número positivo será escrito depois? Por quê?*

Solução. (a) Se o número escrito por Pedro for ímpar, então o número que Miguel escreverá deverá ser par. De fato, Miguel deverá escrever o número $3n+1$. Como n é ímpar, $3n$ também é ímpar, pois é o produto de dois ímpares. Logo, o número $3n+1$ escrito por Miguel é necessariamente par.

(b) Se um dos dois escreve o número 1, então os números seguintes serão $4, 2, 1, 4, 2, 1, \ldots$, sendo esse padrão repetido daí por diante. Assim, se o número 1 aparecer na lista, então o número 5 não aparecerá depois dele.

(c) A lista de números que começa com o número -5 é $-5, -14, -7, -20, -10, -5$, etc., havendo repetição desses números daí por diante. Dessa forma, não há como aparecer algum número positivo na sequência. □

Observação 6. *Se o valor inicial n for inteiro e positivo, então, depois de um número finito de passos, a sequência obtida no Exemplo 5 sempre atinge o número 1? Essa pergunta, que teve sua origem em 1934, com o matemático alemão Lothar Collatz, ainda não foi respondida. Esse problema é chamado Problema de Collatz ou Problema $3n+1$.*

Dicas para o Professor

Os exercícios dessa aula podem ser explorados em um encontro de 50 minutos. Se você dispuser de mais tempo, pode explorar em um outro encontro de 50 minutos o "problema $3n+1$", citado na 6, que se relaciona com o exemplo 5. Mais informações sobre esse problema podem ser encontradas na sugestão de leitura complementar número 3. Esse exemplo é interessante porque o aluno pode ter contato com um problema em aberto cujo enunciado é perfeitamente compreensível. Isso reforça a ideia de que a Matemática é um campo de estudo vivo, onde há ainda muito a descobrir.

Sugestões de Leitura Complementar

1. Elon Lages Lima. *Meu Professor de Matemática e outras histórias.* Rio de Janeiro, Editora S.B.M., 1991.

2. E. de Alencar Filho. *Teoria Elementar dos Números.* São Paulo, Nobel, 1989.

3. Klee, V. e Wagon, Stan. *Old and New Unsolved Problems in Plane Geometry and Number Theory.* Dolciani Mathematical Expositions, 11, Washington, MAA, 1991.