Material Teórico - Módulo Cardinalidade de Conjuntos

Conjuntos Enumeráveis – Parte I

Tópicos Adicionais

Autor: Antonio Caminha M. Neto

10 de Julho de 2024

1 Conjuntos enumeráveis

Na aula passada, recordamos o conceito de conjunto finito e utilizamos a alegoria do Hotel de Hilbert para ilustrar algumas situações curiosas que ocorrem com conjuntos infinitos. Nesta aula, pretendemos concentrar nossa atenção em um tipo particular de conjunto infinito, conforme a definição a seguir.

Em tudo o que segue, como de constume, denotamos por $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais[1], isto é,

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

Também como de costume, denotamos por $\mathbb{Z}$ o conjunto dos números inteiros,

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

e por $\mathbb{Q}$ o conjunto dos números racionais,

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b};\, a, b \in \mathbb{Z},\ \text{com } b \neq 0 \right\}.$$

Definição 1. *Um conjunto não vazio A é **enumerável** se for finito ou se existir uma bijeção $f : \mathbb{N} \to A$.*

A seguir, listamos alguns exemplos de conjuntos infinitos enumeráveis.

Exemplo 2. *O conjunto $\mathbb{N}$ é enumerável.*

Prova. Realmente, a função identidade $\mathrm{Id} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, que associa cada $n \in \mathbb{N}$ a si mesmo, é uma bijeção. $\square$

[1] O leitor atento terá percebido que essa definição de $\mathbb{N}$ difere daquela utilizada nas vídeo-aulas desse módulo, as quais incluem 0 em $\mathbb{N}$. Em que pese o fato de a inclusão ou não de 0 em $\mathbb{N}$ ser, em larga medida, uma questão de escolha, optamos por excluir 0 de $\mathbb{N}$ em atenção à expressão "*número natural*", emprestada aos elementos do conjunto $\mathbb{N}$. Realmente, tal expressão sugere que um número natural sejam o resultado de um processo de contagem — e, portanto, exclui o zero. Observamos, ainda, que a ideia do número zero e a consequente representação da ausência de quantidade foi historicamente muito mais tardia.

Exemplo 3. *O conjunto das potências de 2 de expoentes naturais,*

$$\{2^1, 2^2, 2^3, 2^4, \ldots\},$$

é enumerável.

Prova. Denote por A o conjunto do enunciado.

Definindo $f : \mathbb{N} \to A$ por

$$f(n) = 2^n,$$

obtemos uma função f que é sobrejetiva pela definição do conjunto A.

Por outro lado, a Aritmética elementar ensina que, para $m, n \in \mathbb{N}$,

$$f(m) = f(n) \Rightarrow 2^m = 2^n \Rightarrow m = n,$$

de sorte que f é injetiva.

Por fim, sendo injetiva e sobrejetiva, f é bijetiva, conforme desejado. $\square$

Exemplo 4. *O conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros é enumerável.*

Prova. Nesse caso, é um pouco mais difícil construir explicitamente uma bijeção $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$. No entanto, a ideia é que, listando os inteiros como

$$0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, -4, 4, \ldots,$$

fica clara a existência de uma *correspondência biunívoca* (isto é, uma bijeção) entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$. Em símbolos, a listagem acima sugere as correspondências

$$1 \mapsto 0, \quad 2 \mapsto -1, \quad 3 \mapsto 1, \quad 4 \mapsto -2, \quad 5 \mapsto 2, \quad 6 \mapsto -3, \ldots$$

Separando a listagem acima em duas,

$$1 \mapsto 0, \quad 3 \mapsto 1, \quad 5 \mapsto 2, \quad 7 \mapsto 3, \ldots$$

e

$$2 \mapsto -1, \quad 4 \mapsto -2, \quad 6 \mapsto -3, \quad 8 \mapsto -4, \ldots,$$

fica fácil perceber como definir formalmente uma $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ bijetiva: basta pôr

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{2}, & \text{se } x \text{ for ímpar} \\ \frac{-x}{2}, & \text{se } x \text{ for par} \end{cases} .$$

Para verificar que f é realmente uma bijeção, note inicialmente que, para $x, y \in \mathbb{N}$ ambos pares,

$$f(x) = f(y) \Rightarrow \frac{-x}{2} = \frac{-y}{2} \Rightarrow x = y;$$

para $x, y \in \mathbb{N}$ ambos ímpares,

$$f(x) = f(y) \Rightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} \Rightarrow x - 1 = y - 1 \Rightarrow x = y;$$

por fim para x par e y ímpar,

$$f(x) = f(y) \Rightarrow \frac{-x}{2} = \frac{y-1}{2} \Rightarrow -x = y - 1 \Rightarrow x + y = 1,$$

o que é impossível com x e y naturais. Então, nesse caso, $f(x) = f(y)$ nunca ocorre, e f é injetiva.

A sobrejetividade de f é menos trabalhosa: se $n \in \mathbb{Z}$ for não negativo, então $2n + 1$ é ímpar e positivo, logo, natural; daí,

$$f(2n+1) = \frac{(2n+1)-1}{2} = n.$$

Por outro lado, se $n \in \mathbb{Z}$ for negativo, então $-2n$ é positivo e par, logo, natural; assim,

$$f(-2n) = \frac{-(-2n)}{2} = n.$$

Então, f é sobrejetiva.

Assim, f é bijetiva, como precisávamos provar. $\square$

Exemplo 5. *O conjunto das potencias de* 2 *de expoentes inteiros,*

$$\{\ldots, 2^{-3}, 2^{-2}, 2^{-1}, 2^{0}, 2^{1}, 2^{2}, 2^{3}, \ldots\},$$

é enumerável.

Prova. Denote por A o conjunto do enunciado.

Definindo $g : \mathbb{Z} \to A$ por

$$g(n) = 2^n,$$

obtemos uma função g que é sobrejetiva pela definição do conjunto A.

Por outro lado, a Aritmética elementar ensina que, para $m, n \in \mathbb{Z}$,

$$g(m) = g(n) \Rightarrow 2^m = 2^n \Rightarrow m = n,$$

de sorte que f é injetiva.

Então, sendo injetiva e sobrejetiva, g é bijetiva. Contudo, nesse caso isso não termina nosso trabalho, pois o que obtivemos foi uma bijeção entre os conjuntos $\mathbb{Z}$ e A (e não entre $\mathbb{N}$ e A).

Entretanto, sendo $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ a bijeção construída no exemplo anterior, podemos compor g e f para obter a função

$$g \circ f : \mathbb{N} \to A.$$

Sendo uma composição de duas bijeções, sabemos, do material teórico da aula anterior, que $g \circ f$ também é bijetiva, conforme desejado. $\square$

Para o que segue, recorde que, para $n \in \mathbb{N}$, denotamos por I_n o conjunto dos naturais de 1 a n, isto é, $I_1 = \{1\}$, $I_2 = \{1, 2\}$, $I_3 = \{1, 2, 3\}$ etc.

A intuição que torna interessante o conceito de conjunto enumerável é que, construindo uma bijeção $f : I_n \to A$ (no caso em que A é um conjunto enumerável e finito, com n elementos) ou $f : \mathbb{N} \to A$ (no caso em que A é um conjunto enumerável e infinito), arranjamos uma maneira de listar, ou *enumerar*, os elementos de A. Temos, então, a seguinte

Definição 6. *Se A for um conjunto enumerável e finito, com n elementos, uma **enumeração** de A é uma bijeção $f : I_n \to A$. Se A for um conjunto enumerável e infinito, uma **enumeração** de A é uma bijeção $f : \mathbb{N} \to A$.*

Sejam A um conjunto enumerável e finito, com n elementos, e $f : I_n \to A$ uma enumeração de A. Para $1 \leq k \leq n$ natural (k é um elemento típico de I_n), escreva a_k para denotar a imagem $f(k)$, de k por f. Então,

$$\begin{aligned} A &= \mathrm{Im}(f) = \{f(k);\, 1 \leq k \leq n,\ \text{com } k \text{ natural}\} \\ &= \{f(1), f(2), \ldots, f(n)\} \\ &= \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}, \end{aligned}$$

que é a notação usualmente empregada quando pensamos em um conjunto finito de n elementos.

Da mesma forma, seja A um conjunto enumerável e infinito, e $f : \mathbb{N} \to A$ uma enumeração de A. Para k natural (k é um elemento típico de $\mathbb{N}$), escreva a_k para denotar a imagem $f(k)$, de k por f. Então,

$$\begin{aligned} A &= \mathrm{Im}(f) = \{f(k); k \in \mathbb{N}\} \\ &= \{f(1), f(2), f(3), \ldots\} \\ &= \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}, \end{aligned}$$

que é a notação usualmente empregada quando pensamos em um conjunto infinito e enumerável[2]

O exemplo 3 e quaisquer outros exemplos de subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$ nos quais consigamos pensar (releia a discussão sobre o Hotel de Hilbert, no material da aula anterior, a fim de identificar mais alguns desses conjuntos), fazem-nos desconfiar de que todo subconjunto infinito dos naturais seja enumerável.

Esse é realmente o caso, mas para demonstrar tal fato, assumiremos a validade do resultado a seguir.

Teorema 7 (Princípio da Boa Ordenação). *Todo subconjunto não vazio A dos naturais possui um elemento mínimo.*

O Princípio da Boa Ordenação é uma consequência dos *Axiomas de Peano*, que definem axiomaticamente o conjunto

[2]Mais adiante, veremos que não é possível empregar uma notação como essa para representar o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, pois $\mathbb{R}$ *não é enumerável*.

$\mathbb{N}$ dos naturais. Uma discussão muito instrutiva sobre os axiomas de Peano pode ser encontrada no capítulo 2 da referência [3].

Proposição 8. *Todo subconjunto infinito do conjunto dos naturais é enumerável.*

Prova. Seja A um subconjunto infinito de $\mathbb{N}$. No que segue, utilizaremos o Princípio da Boa Ordenação para construir uma bijeção $f : \mathbb{N} \to A$.

Como A é, em particular, um subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$, o Princípio da Boa Ordenação que A possui um elemento mínimo, o qual denotaremos por $\min A$. Faça

$$f(1) = \min A.$$

Como $A \setminus \{f(1)\}$ é não vazio, aplicando novamente o Princípio da Boa Ordenação, pomos

$$f(2) = \min(A \setminus \{f(1)\}).$$

Em particular, $f(2) > f(1)$.

Mais geralmente, a infinitude de A permite definir, para $n > 2$ natural,

$$f(n) = \min(A \setminus \{f(1), f(2), \ldots, f(n-1)\}). \tag{1}$$

Afirmamos que f é crescente, isto é, que

$$m < n \Rightarrow f(m) < f(n).$$

Por contradição, suponha que existissem $m < n$ naturais tais que $f(n) \leq f(m)$. Como $m \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, (1) garante que $f(m)$ foi um dos naturais retirados de A antes de calcularmos $f(n)$; logo, $f(n) \neq f(m)$ e, assim, $f(n) < f(m)$.

Por outro lado, como $m < n$, temos

$$A \setminus \{f(1), f(2), \ldots, f(n-1)\} \subset A \setminus \{f(1), f(2), \ldots, f(m-1)\}$$

e, daí, (1) garante que

$$f(n) \in A \setminus \{f(1), f(2), \ldots, f(m-1)\}.$$

Então

$$f(n) \geq \min(A \setminus \{f(1), f(2), \ldots, f(m-1)\}) = f(m),$$

o que é uma contradição.

Para a sobrejetividade de f, suponha, novamente por contradição, que exista $a \in A \setminus \operatorname{Im}(f)$. Como f é crescente e A é infinito, temos $\operatorname{Im}(f)$ infinito. Então, $\operatorname{Im}(f)$ contém elementos maiores que a, isto é, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f(n) > a$. Contudo, como $A \setminus \operatorname{Im}(f) \subset A \setminus \{f(1), f(2), \ldots, f(n-1)\}$, temos $a \in A \setminus \{f(1), f(2), \ldots, f(n-1)\}$, de modo que

$$a \geq \min(A \setminus \{f(1), f(2), \ldots, f(n-1)\}) = f(n),$$

uma contradição. □

Exemplo 9. *O conjunto A dos naturais da forma $2^m 3^n$, com $m, n \in \mathbb{N}$, isto é, o conjunto*

$$A = \{2, 3, 6, 9, 12, 16, 18, 27, 32, 36, \ldots\},$$

é enumerável.

Prova. Isso é uma consequência imediata da proposição anterior. □

Para o próximo exemplo, recorde que um natural $p > 1$ é **primo** se seus únicos divisores positivos forem 1 e ele mesmo. Assim, 2, 3, 5, 7 e 11 são primos, e o Teorema de Euclides(veja a seção 1.3 da referência [2], por exemplo) ensina que o conjunto dos P dos números primos é infinito.

Exemplo 10. *O conjunto dos P dos primos é enumerável.*

Prova. Novamente, isso é uma consequência imediata da proposição anterior. □

Em relação aos dois últimos exemplos, cumpre observar que, ainda que saibamos que se tratam de conjuntos infinitos e enumeráveis, um problema bem diferente é aquele de *obter explicitamente, por meio de uma fórmula*, uma bijeção $f : \mathbb{N} \to A$ ou $f : \mathbb{N} \to P$.

Sendo

$$P = \{p_1 < p_2 < p_3 < \ldots\}$$

a enumeração do conjunto dos primos em ordem crescente, resolver esse problema para P, por exemplo, equivale a obter uma fórmula para o n-ésimo primo p_n em função de n. Tais fórmulas existem, ainda que, atualmente, sejam computacionalmente inúteis para o cálculo de primos muito grandes. A esse respeito, veja a referência [4].

No próximo material, precisaremos da seguinte consequência da proposição anterior.

Corolário 11. *Se $f : A \to \mathbb{N}$ for uma função injetiva, então A é enumerável.*

Prova. Se A for finito, não há o que fazer. Suponha, pois, que A seja infinito. Denotando

$$B = \mathrm{Im}(f),$$

temos que B é um subconjunto infinito de $\mathbb{N}$, logo, enumerável, pela proposição anterior. Sendo B enumerável, sabemos que existe uma bijeção $g : B \to \mathbb{N}$.

Seja, agora, $h : A \to B$ a função tal que $h(x) = f(x)$, para todo $x \in A$. Como f é injetiva, h também o é. Por outro lado, a única coisa que impedia f de ser uma bijeção era o fato de que sua imagem B não necessariamente coincidia com o contra-domínio $\mathbb{N}$. No entanto, isso não ocorre em h: como $B = \mathrm{Im}(f)$ e o efeito de h sobre os elementos de A coincide com aquele de f, temos que h é sobrejetiva. Então, h é uma bijeção de A em B.

Por fim, a função $g \circ h : A \to \mathbb{N}$, sendo a composta das bijeções $h : A \to B$ e $g : B \to \mathbb{N}$, é ela mesma uma bijeção. Portanto, A é enumerável. $\square$

Dicas para o Professor

A princípio, os estudantes podem ver enumerabilidade como um tema um tanto "*vazio*", haja vista que os exemplos e resultados reunidos neste material são intuitivamente “óbvios”. Contudo, o professor deve chamar a atenção dos alunos para o fato de que o trabalho que tivemos aqui, para formalizar nossa discussão, mostrar-se-á bastante útil quando estabelecermos, nos próximos materiais, a enumerabilidade de $\mathbb{Q}$ e a não enumerabilidade de $\mathbb{R}$, os quais não são resultados óbvios.

Sugerimos que sejam utilizadas duas sessões de 50min para expor o conteúdo deste material. Estudantes mais interessados podem achar instigante a leitura dos capítulos 1 e 2 da referência [3].

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 3: Introdução à Análise*, terceira edição.

2. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 5: Teoria dos Números*, terceira edição. SBM, Rio de Janeiro, 2022.

3. E. L. Lima. *Curso de Análise, volume* 1, décima primeira edição. Rio de Janeiro, IMPA, 2014. Rio de Janeiro, SBM, 2023.

4. Wikipedia. `https://en.wikipedia.org/wiki/Formula_for_primes`