Material Teórico - Módulo Números Complexos - Forma Geométrica

Adição e Subtração de números complexos no plano de Argand-Gauss - Parte I

Terceiro Ano do Ensino Médio

Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

18 de julho de 2020

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Interpretação geométrica da adição

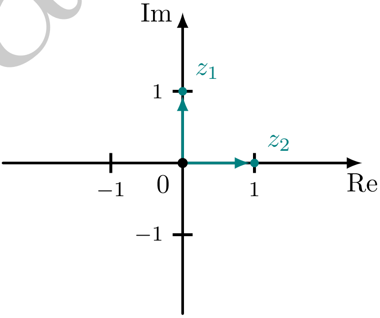
No fim do Módulo "Números Complexos - Forma Algébrica", já começamos a mostrar como a forma geométrica e a forma algébrica dos números complexos se relacionam. Interpretamos o complexo $z = a + bi$ como o ponto no plano de Argand-Gauss que possui coordenadas cartesianas (a, b). Este ponto é chamado de *afixo* de z. Além disso, aprendemos que também podemos pensar em z como o vetor de coordenadas (a, b). Vimos, ainda, que o módulo de z é dado por $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ e representa a distância de z até a origem, 0. Por fim, vimos que todo complexo também pode ser escrito na forma polar: $z = |z| \operatorname{cis} \theta$.

Neste módulo, vamos estudar como as operações (algébricas) de adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação entre números complexos podem ser interpretadas geometricamente. Especificamente neste material, trataremos da adição e da subtração.

Iniciamos com alguns exemplos.

Exemplo 1. *Sejam $z_1 = i$ e $z_2 = 1$. Marque, no plano de Argand-Gauss, os complexos $z_3 = z_1 + z_2$ e $z_4 = z_1 - z_2$.*

Solução. Marquemos o ponto z_1 sobre o eixo Imaginário (já que sua parte real é zero) e desenhemos o vetor $\overrightarrow{z_1}$ que vai de 0 até z_1. Da mesma forma, marcamos o ponto z_2 sobre o eixo Real, e um vetor $\overrightarrow{z_2}$ que vai de 0 até z_2.



Calculando a soma z_3 de z_1 e z_2, temos

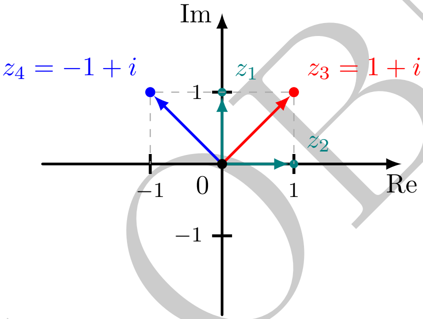
$$z_3 = z_1 + z_2 = i + 1 = 1 + i,$$

que corresponde ao ponto $(1, 1)$, do plano cartesiano. Da mesma forma, a diferença é

$$z_4 = z_1 - z_2 = i - 1 = -1 + i$$

corresponde ao ponto $(-1, 1)$. (Não confundir com o ponto $(1, -1)$, que corresponde a $1 - i$).

A figura abaixo agrega, à anterior, os vetores que vão de 0 até z_3 e z_4.



$\square$

Exemplo 2. *Sejam $z_1 = 1+i$ e $z_2 = -1+i$. Marque no plano de Argand-Gauss os complexos $z_3 = z_1 + z_2$ e $z_4 = z_1 - z_2$.*

Solução. Assim como no exercício anterior, começamos marcando z_1, z_2 e os vetores correspondentes. Agora, temos que:

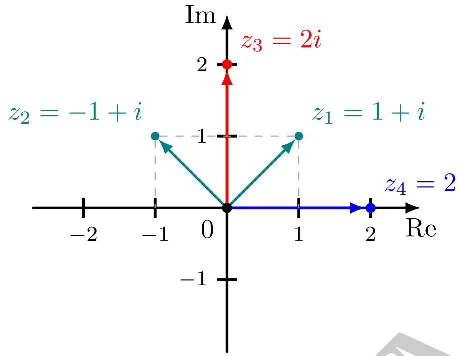
$$z_3 = z_1 + z_2 = (\cancel{1} + i) + (\cancel{-1} + i) = 2i,$$

que corresponde ao ponto $(0, 2)$ sobre o eixo imaginário. Também,

$$z_4 = z_1 - z_2 = (1 + i) - (-1 + i) = 1 + \cancel{i} + 1 - \cancel{i} = 2,$$

que corresponde ao ponto $(2, 0)$ sobre o eixo real.

A próxima figura marca todos esses pontos, assim como os vetores que partem de 0 até eles.

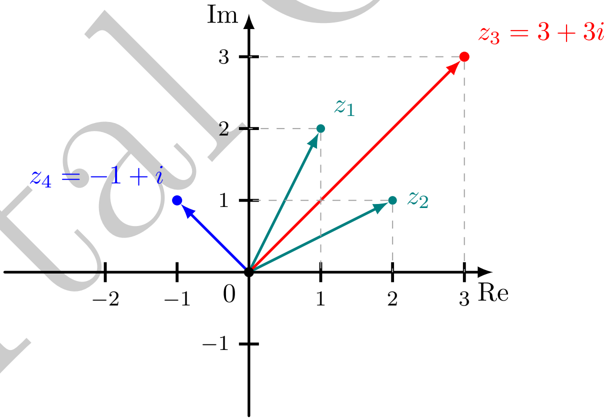


□

Faremos mais dois exemplos, sem incluir os detalhes. O leitor pode efetuar a soma e a subtração algebricamente e marcar os pontos no plano.

Exemplo 3. *Sejam* $z_1 = 1 + 2i$ *e* $z_2 = 2 + i$*. Marque no plano de Argand-Gauss os complexos* $z_3 = z_1 + z_2$ *e* $z_4 = z_1 - z_2$*.*

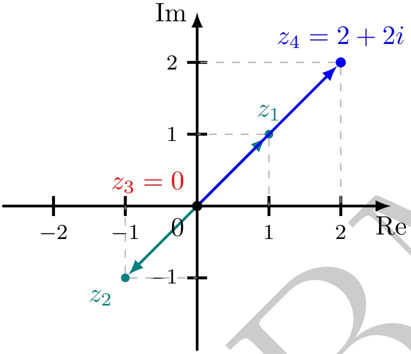
Solução. Temos que: $z_3 = 3 + 3i$ e $z_4 = -1 + i$.



□

Exemplo 4. *Sejam $z_1 = 1+i$ e $z_2 = -1-i$. Marque no plano de Argand-Gauss os complexos $z_3 = z_1 + z_2$ e $z_4 = z_1 - z_2$.*

Solução. Temos que: $z_3 = 0$ e $z_4 = 2 + 2i$.



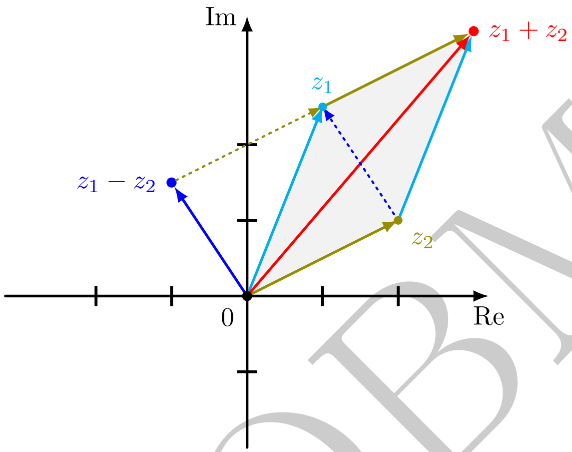
□

Caso o leitor já tenha conhecimento prévio sobre vetores, o que deve ficar claro dos exemplos acima é que somar (respectivamente, subtrair) os complexos é equivalente a somar (respectivamente, subtrair) os vetores que os representam. Em casa exemplo acima, apenas calculamos as somas algebricamente. Do ponto de visto geométrico, a soma e a subtração são obtidas pela *regra do paralelogramo*, a menos que os vetores possuam a mesma direção. Detalhes sobre isso podem ser encontrados no módulo "Vetores em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$". Abaixo, faremos uma breve revisão.

Considere os vetores correspondentes aos dois complexos, z_1 e z_2, que se deseja somar/subtrair. Desenhe os vetores de forma que cada um comece na origem do plano, o ponto $(0, 0)$. Vejamos primeiro o caso em que o vetores possuem direções diferentes (acompanhe a discussão na figura a seguir).

Construa o paralelogramo que possui os dois vetores dados como lados adjacentes. Para isso, basta traçar uma reta passando por z_1 e tendo a direção do vetor $\overrightarrow{z_2}$ e outra reta passando por z_2 e tendo a direção de $\overrightarrow{z_1}$. A interseção dessas duas retas é o afixo do complexo que representa a soma

$z_1 + z_2$. Assim, o vetor que vai da origem até essa interseção tem direção ao longo de uma diagonal do paralelogramo e é igual a $\overrightarrow{z_1} + \overrightarrow{z_2}$.



Por fim, a outra diagonal do mesmo paralelogramo descrito acima, tomada na direção de z_2 a z_1, representa o vetor $\overrightarrow{z_1} - \overrightarrow{z_2}$. Dessa forma, se pegarmos este vetor e o desenharmos partindo do ponto $(0, 0)$, sua outra extremidade estará sobre o complexo $z_2 - z_1$.

Resta, ainda, o caso em que os vetores têm uma mesma direção. Isso significa que os afixos dos números complexos 0, z_1 e z_2 estão sobre uma mesma reta. Neste caso, tanto a soma como a subtração terão afixos sobre essa mesma reta. Lembre que todo vetor tem "intensidade", "direção" e "sentido". Se os os dois vetores a serem somados possuem mesma direção e mesmo sentido, basta somar suas "intensidades" (o que equivale a somar os módulos dos complexos). Se tiverem a mesma direção mas sentidos opostos, para *somar* os vetores precisamos *subtrair* a "intensidade" menor da maior. Por fim, a subtração de um vetor é feita somando o vetor de sentido oposto.

Vejamos mais alguns exemplos.

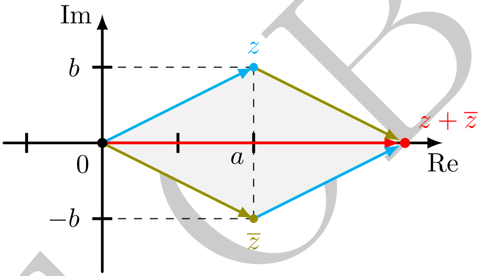
Exemplo 5. *A soma de um complexo com o seu conjugado sempre resulta em um número real.*

Solução. Sendo $z = a + bi$ um complexo, lembre-se de que seu conjugado é o complexo $\overline{z} = a - bi$. Assim, a soma de z com seu conjugado é:

$$z + \overline{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a,$$

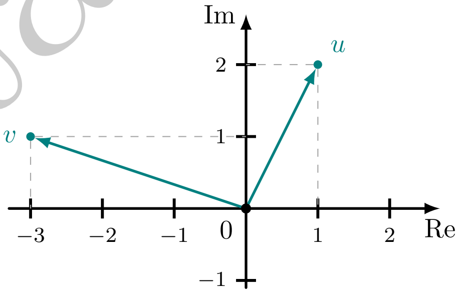
que é um número real.

Do ponto de vista geométrico, o conjugado $\overline{z}$ é obtido pela reflexão de z em torno do eixo-x (pense como se o eixo-x fosse um espelho). A figura abaixo mostra a posição de $z + \overline{z}$ após aplicar a regra do paralelogramo.



□

Exemplo 6. *Na figura abaixo, qual a representação algébrica do complexo que representa a soma de u e v.*



Solução. Podemos interpretar da figura que $u = 1 + 2i$ e $v = -3+i$. Como queremos apenas a representação algébrica, basta calcular:

$$\begin{aligned} u + v &= (1 + 2i) + (-3 + i) \\ &= (1 - 3) + (2 + 1)i \\ &= -2 + 3i. \end{aligned}$$

$\square$

Exemplo 7. *Qual das alternativas abaixo está correta sobre a adição de números complexos?*

(*a*) *A soma de dois números complexos pode ser representada geometricamente no plano de Argand-Gauss, mas não a diferença.*

(*b*) *Ao subtrair dois números complexos, a letra i, referente à raiz quadrada de -1, sempre desaparece, pois $i - i = 0$.*

(*c*) *A soma entre dois números complexos sempre resulta em um número real e, às vezes, em outro número complexo.*

(*d*) *Na adição entre números complexos também valem as propriedades de comutatividade e associatividade, da adição de números reais.*

(*e*) *O conjunto dos números reais contém o conjunto dos números complexos.*

Solução.

(a) Falso! Conforme vimos, tanto a soma quanto a diferença possuem interpretações geométricas.

(b) Falso! A letra i só irá desaparecer quando a parte imaginária de um dos números for o negativo da parte imaginário do outro. Ou seja, quando um dos números for o conjugado do outro.

(c) Falso! O próprio item se contradiz. Nem sempre o resultado da adição de complexos é um número real. Ela pode ser real, mas não precisa ser. Por outro lado, ele sempre é um complexo, pois todo real também é um complexo.

(d) Verdadeira, conforme estudamos no módulo sobre a forma algébrica.

(e) Falso! O conjunto dos complexos que contém o conjunto dos reais.

□

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 6: Polinômios*. SBM, Rio de Janeiro, 2016.

2. Complex Numbers, página online da Wikipedia (em inglês), `https://en.wikipedia.org/wiki/Number`.