Material Teórico - Módulo de FRAÇÃO COMO PORCENTAGEM E COMO PROBABILIDADE

Fração como Probabilidade - União e Interseção de Eventos

Sexto Ano do Ensino Fundamental

Prof. Francisco Bruno Holanda
Prof. Antonio Caminha Muniz Neto

1 Evento complementar e união de dois eventos

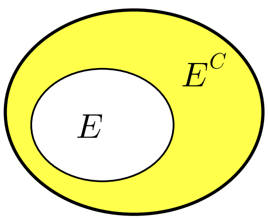
Na aula anterior, apredendos alguns conceitos básicos sobre probabilidade, tais como os conceitos de **evento** e **espaço amostral**. Vimos também que, quando o espaço amostral é um finito, podemos definir um evento E como sendo a coleção dos possíveis resultados de um experimento. Em particular, cada evento é um conjunto, de forma que podemos utilizar os conceitos da Teoria dos Conjuntos para desenvolver uma Teoria de Probabilidade.

Ainda no contexto de conjuntos finitos, definimos a **probabilidade** do evento E, denotada $P(E)$, pondo

$$P(E) = \frac{\#E}{\#A}, \tag{1}$$

onde $\#X$ denota o número de elementos do conjunto finito X.

Uma vez que o evento E é um subconjunto do espaço amostral A, podemos considerar o **evento complementar** a E, denotado E^c, o qual é definido como o conjunto dos elementos de A que não pertencem a E:



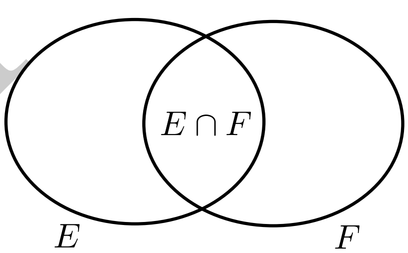
Temos, então, a fórmula para a

I. Probabilidade do Evento Complementar:

$$P(E^c) = 1 - P(E).$$

Em palavras, a identidade acima nos diz que a probabilidade do evento complementar é igual a 1 menos a probabilidade do evento inicial. Por exemplo, se a probabilidade de chover amanhã for $\frac{1}{3}$, então a probabilidade de não chover será $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Agora, sendo F um outro evento em A, temos que E e F são subconjuntos de A e, como tal, podemos considerar o **evento união** e o **evento interseção** de E e F, denotados por $E \cup F$ e $E \cap F$, respectivamente. Recordamos que



$E \cup F$ é definido como o conjunto dos elementos de A que pertencem a pelo menos um dentre os conjuntos E e F, ao passo que $E \cap F$ é definido como o conjunto dos elementos de A que pertencem a ambos os conjuntos E e F.

Em termos de probabilidade, esses conceitos nos dão a fórmula para a

II. Probabilidade da União de Dois Eventos:

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F).$$

Para demonstar as identidades I e II, comecemos observando que, para dois conjuntos finitos quaisquer E e F, vale a fórmula

$$\#(E \cup F) = \#E + \#F - \#(E \cap F), \tag{2}$$

que pode ser facilmente obtida a partir do *diagrama de Venn* acima, para a união de E e F. Realmente, examinando tal diagrama, percebemos que a soma $\#E + \#F$ conta os elementos de $E \cap F$ duas vezes, de forma que, para calcular $\#(E \cup F)$, precisamos descontar $\#(E \cap F)$ uma vez.

Dividindo ambos os membros de (2) por $\#A$, obtemos

$$\frac{\#(E \cup F)}{\#A} = \frac{\#E}{\#A} + \frac{\#F}{\#A} - \frac{\#(E \cap F)}{\#A}.$$

Em seguida, aplicando (1) para calcular $P(E \cup F)$, $P(E)$, $P(F)$ e $P(E \cap F)$, obtemos $P(E \cup F) = \frac{\#(E \cup F)}{\#A}$, $P(E) = \frac{\#E}{\#A}$, $P(F) = \frac{\#F}{\#A}$ e $P(E \cap F) = \frac{\#(E \cap F)}{\#A}$. Substituindo tais igualdades na relacão acima, obtemos a fórmula para a probabilidade da união de dois eventos.

Agora, note que a fórmula para a probabilidade do evento complementar é um caso particular da fórmula para a probabilidade da união. Realmente, como $E \cup E^c = A$ e $E \cap E^c = \emptyset$, temos $P(E \cup E^c) = 1$ e $P(E \cap E^c) = 0$; portanto, fazendo $F = E^c$ na fórmula para a probabilidade da união de dois eventos, obtemos

$$\begin{aligned} 1 &= P(E \cup E^c) \\ &= P(E) + P(E^c) - P(E \cap E^c) \\ &= P(E) + P(E^c). \end{aligned}$$

2 Independência e probabilidade condicional

Outro conceito de grande importância em Probabilidade é o de **independência de dois eventos**, conforme definido a seguir.

Definição 1. *Dois eventos E e F em um espaço amostral A, são independentes se*

$$P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F).$$

A fim de explicar a ideia por trás do conceito de independência de dois eventos, suponha que realizamos um certo experimento no espaço amostral finito A e, ao examinarmos as ocorrências dos eventos E e F, suponha que saibamos que E realmente ocorreu. Então, para que F ocorra, os resultados favoráveis são aqueles em $E \cap F$, dentre os $\#E$ elementos do evento E.

O argumento do parágrafo anterior sugere que a probabilidade da ocorrência de F possa ser calculada dividindo-se $\#(E \cap F)$ por $\#E$. O resultado dessa divisão é a **probabilidade condicional** da ocorrência de F, dado que E ocorreu, sendo denotado por $P(F|E)$. Em símbolos,

$$P(F|E) = \frac{\#(E \cap F)}{\#E}.$$

Observando que

$$\frac{\#(E \cap F)}{\#E} = \frac{\frac{\#(E\cap F)}{\#A}}{\frac{\#E}{\#A}} = \frac{P(E \cap F)}{P(E)},$$

concluímos que

$$\boxed{P(F|E) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)}}$$

ou, o que é o mesmo,

$$\boxed{P(E \cap F) = P(F|E) \cdot P(E).}$$

Por outro lado, se E e F forem eventos independentes, então $P(F|E)$ realmente coincide com $P(F)$. Realmente, nesse caso, segue das definições de probabilidade condicional e de independência de eventos que

$$P(F|E) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)} = P(F).$$

A última relação acima deixa claro o porquê do nome "*independentes*" atrelado a um par de eventos E e F satisfazendo a relação da Definição 1: uma vez que $P(F|E) = P(F)$ quando E e F são independentes, o cálculo da probabilidade de F ocorrer *independe* da ocorrência ou não de E.

É importante o leitor observar que a condição de independência não é automática, quer dizer, há pares de eventos E e F que não são independentes. Em tais casos, veja que

$$P(F|E) \neq P(F)$$

ou, o que é o mesmo,

$$P(E \cap F) \neq P(E) \cdot P(F).$$

Para um exemplo, considere o experimento de lançar simultaneamente um dado verde e outro vermelho, ambos não viciados, e observar os resultados. Nesse caso, o espaço amostral A é o conjunto dos pares (a, b), com $1 \leq a, b \leq 6$, de forma que $\#A = 6 \cdot 6 = 36$. Em seguida, consideremos em A os dois eventos a seguir:

$$E: \text{ a soma dos números dos dois dados é maior que } 7;$$

$$F: \text{ a soma dos números dos dois dados é par.}$$

Os pares pertencentes ao evento E são $(2, 6)$, $(3, 5)$, $(3, 6)$, $(4, 4)$, $(4, 5)$, $(4, 6)$, $(5, 3)$, $(5, 4)$, $(5, 5)$, $(5, 6)$, $(6, 2)$, $(6, 3)$, $(6, 4)$, $(6, 5)$ e $(6, 6)$, de forma que

$$P(E) = \frac{\#E}{\#A} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}.$$

Os pares pertencentes ao evento F são $(1, 1)$, $(1, 3)$, $(1, 5)$, $(2, 2)$, $(2, 4)$, $(2, 6)$, $(3, 1)$, $(3, 3)$, $(3, 5)$, $(4, 2)$, $(4, 4)$, $(4, 6)$, $(5, 1)$, $(5, 3)$, $(5, 5)$, $(6, 2)$, $(6, 4)$ e $(6, 6)$, de modo que

$$P(F) = \frac{\#F}{\#A} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}.$$

Por fim, os pares pertencentes ao evento $E \cap F$ são $(2, 6)$, $(3, 5)$, $(4, 4)$, $(4, 6)$, $(5, 3)$, $(5, 5)$, $(6, 2)$, $(6, 4)$ e $(6, 6)$, logo,

$$P(E \cap F) = \frac{\#(E \cap F)}{\#A} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}.$$

Então, temos que

$$P(E) \cdot P(F) = \frac{5}{12} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{24} \neq \frac{1}{4} = P(E \cap F),$$

de forma que E e F não são independentes.

Por outro lado, a probabilidade da soma dos números nos dois dados ser par sabendo-se que ela é maior que 7 é a probabilidade condicional $P(F|E)$, calculada como segue:

$$P(F|E) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)} = \frac{1/4}{5/12} = \frac{3}{5}.$$

3 Exercícios

Nesta seção, exercitamos os conceitos discutidos nas duas seções anteriores examinando alguns exemplos interessantes.

Exercício 2. *uma sacola contém* 15 *bolas numeradas de* 1 *a* 15*. Retirando uma bola da sacola ao acaso, calcule a probabilidade do número da mesma ser divisível por* 3 *ou por* 4*.*

Solução. O espaço amostral relacionado ao problema é

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}.$$

Representando por E o evento "o número da bola ser divisível por 3" e por F o evento "o número da bola é divisível por 4", queremos calcular $P(E \cup F)$.

Para tanto, observe que $E = \{3, 6, 9, 12, 15\}$, $F = \{4, 8, 12\}$ e $E \cap F = \{12\}$, de forma que

$$P(E) = \frac{\#E}{\#S} = \frac{1}{3}, \quad P(F) = \frac{\#F}{\#S} = \frac{1}{5}$$

e

$$P(E \cap F) = \frac{\#(E \cap F)}{\#S} = \frac{1}{15}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} P(E \cup F) &= P(E) + P(F) - P(E \cap F) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{15} = \frac{7}{15}. \end{aligned}$$

$\square$

Exercício 3. *Após uma análise meteorológica, descobriu-se que a probabilidade de chover no próximo sábado é $\frac{1}{3}$ e de chover no próximo domingo é $\frac{1}{4}$. Supondo que a previsão para o sábado não afete nem seja afetada pela previsão para o domingo, calcule a probabilidade de chover em pelo menos um dia do final de semana.*

Solução. Vamos primeiro calcular a probabilidade de não chover sábado (evento E) e não chover domingo (evento F).

Uma vez que a previsão para o sábado não afeta nem é afetada pela previsão para o domingo, concluímos que E e F são eventos independentes. Logo, a probabilidade de $E \cap F$ (i.e., de não chover em dia algum do final de semana) é dada por

$$P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2}.$$

Dessa forma, a probabilidade de chover em pelo menos um dia do final de semana é

$$P((E \cap F)^c) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

$\square$

No próximo exercício, utilizaremos o fato de que se E e F são eventos independentes de um espaço amostral finito A, então E^c e F também são independentes (e, por conseguinte, o mesmo sucede com E^c e F^c). Realmente, sendo E e F independentes, temos

$$P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F).$$

Por outro lado, como

$$F = (E \cap F) \cup (E^c \cap F),$$

com

$$(E \cap F) \cap (E^c \cap F) = E \cap E^c \cap F = \emptyset,$$

a fórmula para a probabilidade da união de dois eventos nos dá

$$P(F) = P(E \cap F) + P(E^c \cap F),$$

de modo que

$$\begin{aligned} P(E^c \cap F) &= P(F) - P(E \cap F) \\ &= P(F) - P(E) \cdot P(F) \\ &= (1 - P(E))P(F) \\ &= P(E^c)P(F). \end{aligned}$$

Exercício 4. *Um fábrica produz lâmpadas que têm $\frac{1}{5}$ de probabilidade de queimar nos primeiros 100 dias de uso e $\frac{1}{3}$ de probabilidade de queimar no período de 100 a 200 dias de uso. Admitindo que esses dois eventos (queimar nos primeiros 100 dias de uso e queimar no período de 100 a 200 dias de uso) sejam independentes, pede-se calcular a probabilidade da lâmpada não queimar nos 200 primeiros dias.*

Solução. Para que a lâmpada não queime nos 200 primeiros dias de uso, devem ocorrer os eventos E^c e F^c, onde E e F são os eventos a seguir:

E: queimar nos primeiros 100 dias.
F: queimar no período de 100 a 200 dias.

As probabilidades de ocorrência dos eventos E^c e F^c são facilmente calculadas com o auxílio da fórmula para a probabilidade do evento complementar:

$$P(E^c) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} \quad \text{e} \quad P(F^c) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Como os eventos E e F são independentes por hipótese, a discussão anterior garante que o mesmo sucede com os eventos E^c e F^c. Portanto, a probabilidade buscada é

$$P(E^c \cap F^c) = P(E^c) \cdot P(F^c) = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{15}.$$

$\square$

Para calcular a probabilidade de um evento F que dependa de outro evento E (evidentemente, ambos no espaço amostral finito A) é frequentemente útil notarmos que

$$F = (F \cap E) \cup (F \cap E^c),$$

com

$$(F \cap E) \cap (F \cap E^c) = F \cap E \cap E^c = \emptyset.$$

Portanto, aplicando a fórmula para a probabilidade da união de dois eventos, obtemos

$$\begin{aligned} P(F) &= P\big((F \cap E) \cup (F \cap E^c)\big) \\ &= P(F \cap E) + P(F \cap E^c). \end{aligned}$$

No segundo membro da igualdade acima, substituindo as definições das probabilidades condicionais $P(F|E)$ e $P(F|E^c)$,

$$P(F|E) = \frac{P(F \cap E)}{P(E)} \quad \text{e} \quad P(F|E^c) = \frac{P(F \cap E^c)}{P(E^c)},$$

obtemos a fórmula

$$P(F) = P(F|E) \cdot P(E) + P(F|E^c) \cdot P(E^c),$$

da qual faremos uso no próximo exercício.

Exercício 5. *Uma sorveteria tem por meta vender pelo menos* 100 *picolés por dia. Se o dia for de sol, a probabilidade de bater a meta é de* $\frac{2}{3}$*; se o dia for chuvoso, essa probabilidade é de apenas* $\frac{1}{4}$*. Sabe-se que a probabilidade de chuva para amanhã é de* $\frac{1}{5}$*. Qual é a probabilidade da sorveteria bater sua meta amanhã?*

Solução. Considere os seguintes eventos:

E: fazer sol amanhã;
E^c: chover amanhã;
F: bater a meta amanhã.

Pelo enunciado, temos imediatamente que $P(E^c) = \frac{1}{5}$ e, daí, $P(E) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$. Por outro lado, a probabilidade de bater a meta se o dia for de sol é a probabilidade condicional $P(F|E)$, ao passo que a probabilidade de bater a meta se o dia for chuvoso é a probabilidade condicional $P(F|E^c)$. Assim,

$$P(F|E) = \frac{2}{3} \quad \text{e} \quad P(F|E^c) = \frac{1}{4}.$$

Portanto, a fórmula que precede o enunciado do exercício dá

$$\begin{aligned} P(F) &= P(F|E) \cdot P(E) + P(F|E^c) \cdot P(E^c) \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{7}{12}. \end{aligned}$$

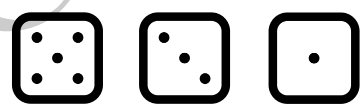
Observe que $P(F|E) \neq P(F)$, de forma que (como era razoável supor) E e F não são eventos independentes. □

Generalizando a definição de independência, dizemos que os eventos E, F e G de um espaço amostral finito A são **independentes** se o forem dois a dois e, além disso,

$$P(E \cap F \cap G) = P(E) \cdot P(F) \cdot P(G). \tag{3}$$

Observamos que é possível dar exemplo de eventos E, F e G de um espaço amostral A, que sejam independentes dois a dois mas para os quais não valha a fórmula acima. Assim, ela realmente deve fazer parte da definição de independência de três eventos.

Exercício 6. *Um dado honesto é lançado três vezes consecutivas. Qual é a probabilidade de surgirem os resultados a seguir (em qualquer ordem)?*



Vejamos duas soluções para esse exercício, a segunda das quais utiliza o conceito de independência para três eventos.

Solução 1. Primeiramente, consideremos como espaço amostral o conjunto A de todos os ternos (a, b, c) de inteiros tais que $1 \leq a, b, c \leq 6$ de forma que a ordem dos resultados dos dados importe. Então, esse espaço amostral tem $6 \times 6 \times 6 = 216$ elementos.

Dentre todos esses 216 resultados, apenas 6 nos interessam: $(5, 3, 1)$, $(5, 1, 3)$, $(3, 1, 5)$, $(3, 5, 1)$, $(1, 5, 3)$ e $(1, 3, 5)$. Portanto, pela definição de probabilidade, temos

$$\frac{\#E}{\#A} = \frac{6}{216} = \frac{1}{36}.$$

□

Solução 2. Observe que a probabilidade de qualquer resultado em um dado honesto é $\frac{1}{6}$. Considerando (como é razoável supor) os diferentes lançamentos do dado como eventos independentes, a probabilidade de obtermos o resultado $(5, 3, 1)$, nesta ordem, é

$$P(5, 3, 1) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{216}.$$

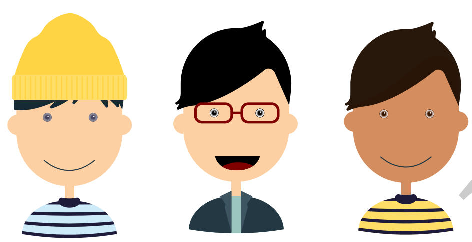
Agora, perceba que a ordem de ocorrência dos resultados 5, 3 e 1 não nos interessa, e que existe seis maneiras distintas de ordenar tais resultados. Também, para cada uma dessas seis ordenações, a probabilidade de obtenção do resultado correspondente continua sendo igual a $\frac{1}{216}$. Portanto, a probabilidade desejada é

$$P(5,3,1)+P(5,1,3)+P(3,5,1)+$$
$$+P(3,1,5)+P(1,5,3)+P(1,3,5)=6\cdot\frac{1}{216}=\frac{1}{36}.$$

□

Vejamos mais um exemplo envolvendo a independência de três eventos.

Exercício 7. *Arnaldo, Bernaldo e Ceraldo estão brincando de jogar dados. Arnaldo é o primeiro a jogar. Se o resultado for 6, ele vence. Caso contrário, será a vez de Bernaldo. Se o resultado obtido por Bernaldo for 6, ele vence. Caso contrário, será a vez de Ceraldo. Se o resultado obtido por Ceraldo for 6, ele vence. Caso contrário, o jogo termina sem vencedores. Admitindo que o dado com o qual eles estão brincando é honesto, calcule a probabilidade de Ceraldo ser o vencedor.*



Solução. Sejam A, B e C os eventos "Arnaldo tirou 6", "Bernaldo tirou 6" e "Ceraldo tirou 6", respectivamente.

Queremos calcular $P(A^c \cap B^c \cap C)$. Para tanto, observe, como o dado é honesto, o fato do resultado de um lançamento ser ou não 6 independe do lançador. Portanto, é razoável supor que os eventos A, B e C sejam independentes, com o que obtemos

$$P(A^c \cap B^c \cap C)=P(A^c)\cdot P(B^c)\cdot P(C).$$

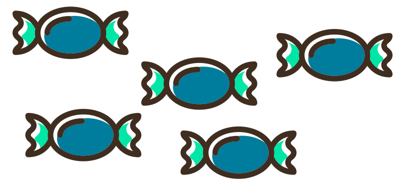
Como $P(A^c)=1-P(A)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$ e, analogamente, $P(B^c)=\frac{5}{6}$, $P(C)=\frac{1}{6}$, temos

$$P(A^c \cap B^c \cap C)=\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{25}{216}.$$

□

O próximo também envolverá três eventos, mas estes não serão independentes.

Exercício 8. *Em uma cesta, temos oito bombons de morango, dez bombons de maracujá e quatro bombons de uva. Calcule a probabilidade de retiramos sucessivamente três bombons de maracujá.*



Solução. Sejam A, B e C os eventos a seguir:

A: o primeiro bombom retirado é de maracujá.
B: o segundo bombom retirado é de maracujá.
C: o terceiro bombom retirado é de maracujá.

Queremos calcular a probabilidade $P(A\cap B\cap C)$. Para tanto, observe que

$$\begin{aligned} P(A\cap B\cap C) &= P(C|A\cap B)\cdot P(A\cap B)\\ &= P(C|A\cap B)\cdot P(B|A)\cdot P(A). \end{aligned} \tag{4}$$

Agora, como começamos com $8+10+4=22$ bombons, 10 dos quais são de maracujá, temos que

$$P(A)=\frac{10}{22}.$$

Por outro lado, sendo o primeiro bombom retirado de sabor maracujá, restarão 21 bombons na cesta, 9 dos quais de maracujá; logo,

$$P(B|A)=\frac{9}{21}.$$

Por fim, se os dois primeiros bombons retirados foram de maracujá, restarão 20 bombons, sendo 8 de maracujá; logo,

$$P(C|A\cap B)=\frac{8}{20}.$$

Então,

$$P(A\cap B\cap C)=\frac{10}{22}\cdot\frac{9}{21}\cdot\frac{8}{20}=\frac{60}{385}.$$

□

4 Sugestões ao Professor

Separe de três a quatro encontros de 50 minutos cada para abordar os temas apresentados nesta aula. Na primeira aula, faça uma pequena revisão sobre probabilidade e introduza a fórmula da probabilidade da união utilizando o caderno de exercícios disponível no site do Portal da Matemática como material auxiliar. Na segunda aula, fale sobre eventos independentes e resolva exercícios específicos sobre o assunto. Na terceira aula, trate sobre probabilidade condicional. Tenha em mente que os assuntos propostos nesta aula são difíceis se forem tratados com a profundidade necessária e que mesmo os alunos mais experientes terão problemas para entender os conceitos em sua totalidade. Neste caso, recomendamos uma quarta aula de revisão.

Créditos pelas figuras:
www.freepik.com