# Material Teórico - Módulo de Introdução ao Cálculo - Derivadas de Funções Trigonométricas

## Exercícios - Parte III

## Tópicos Adicionais

**Autor: Tiago Caúla Ribeiro**
**Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto**

**10 de Outubro de 2024**

Portal OBMEP

Portal da Matemática
OBMEP

Continuamos apresentando problemas relacionados ao cálculo diferencial de funções trigonométricas, desta feita considerando aplicações à Física e à Geometria.

# 1 Exemplos

Quando estendemos ou contraímos uma mola, surge uma força atuando no sentido contrário ao do movimento, a qual denominamos *força restauradora.* [1]

De acordo com a *lei de Hooke*, se a mola for deslocada, na direção de seu eixo, $x$ metros a partir de sua posição de equilíbrio, de modo a não sofrer deformações permanentes, a força restauradora se calcula (em Newtons) como $F_r = -kx$, sendo $k > 0$ uma constante que depende do material da mola, sendo, por isso, denominada *constante da mola.* Em palavras, *a força restauradora é proporcional ao deslocamento da posição de equilíbrio.* [2]

Em nosso estudo, a massa das molas é desprezível e não serão consideradas ações de outras forças além da força restauradora.

Dessa forma, suponha que um corpo em movimento de (dimensões desprezíveis e) massa $m$ esteja preso à extremidade livre de uma mola, disposta ao longo do eixo das abscissas [3]. Então, se $x(t)$ for a posição do corpo no instante $t$, a segunda lei de Newton permite escrever $mx''(t) = -kx(t)$, ou seja,

[1] O exemplo com *molas* serve para ilustrar o fenômeno "*elasticidade de um corpo*", objeto de estudo da *teoria da elasticidade.* Para ter uma ideia da relevância desse tópico, o leitor pode consultar o artigo "https://pt.wikipedia.org/wiki/Elasticidade", cujo trecho seguinte destacamos: "*O projeto de estruturas na construção civil usa as equações derivadas da teoria da elasticidade para dimensionar colunas, vigas e lajes.*"

[2] A lei de Hooke também rege o funcionamento dos *dinamômetros*, mecanismos utilizados para medir o resultado de uma força. Dinamômetros podem medir a potência de máquinas e motores, além de serem utilizados como balanças.

[3] Também podemos supor que, quando não flexionada, a mola tem sua extremidade livre na origem.

Portal OBMEP

$$x''(t) + (k/m)x(t) = 0.$$

Pelo exemplo 5 da aula anterior, a solução dessa EDO é

$$x(t) = x(0)\cos(\sqrt{k/m}\cdot t) + \frac{x'(0)}{\sqrt{k/m}}\operatorname{sen}(\sqrt{k/m}\cdot t). \qquad (1)$$

Vejamos uma aplicação da discussão acima.

**Exemplo 1.** *Em um laboratório de Física, um grupo de estudantes deve realizar um experimento de lançamento de um objeto. Para tal, dispõe-se de uma mola com uma pequena placa de aço, de massa* $0,1$ *kg, acoplada em sua extremidade livre.*

*A mola deve ser contraída e o objeto que se pretende lançar deve ser posto no ponto de equilíbrio da mola. Quando liberada, a placa atingirá o objeto, lançando-o a uma distância predeterminada. Fazendo alguns cálculos com ajuda da* teoria das colisões*, os estudantes concluem que a velocidade ideal de impacto da placa com o corpo é de* $18$ *m/s.*

*Sabendo que a constante da mola é* $90$ *N/m, calcule o quanto ela deve ser contraída para que o experimento funcione.*

**Solução.** Se a mola for contraída $d$ metros, então, de acordo com (1), em qualquer instante $t \geq 0$ anterior à colisão, a posição $x(t)$ da placa será dada por

$$x(t) = -d\cdot\cos(\sqrt{90/0,1}\cdot t) = -d\cdot\cos 30t.$$

Perceba que a parcela relativa à função seno não ocorre em $x(t)$ pelo fato do sistema estar em repouso em $t = 0$, de sorte que $x'(0) = 0$.

A colisão ocorrerá no primeiro instante $t_e$ em que $x(t_e) = 0$, isto é, $\cos 30t_e = 0$. Daí, $t_e = \pi/60$ e, nesse instante, a placa atinge o objeto com velocidade

$$x'(t_e) = -d(-30\operatorname{sen} 30t_e) = 30d.$$

Como queremos $x'(t_e) = 18$, a relação $30d = 18$ segue e a resposta é $d = 0,6$ metros. □

Portal OBMEP

Com auxílio do exemplo 10 da 1ª parte dessa aula, podemos escrever

$$1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1$$

para cada real $x$. Em particular, o erro ao se aproximar (por excesso) $\cos x$ por 1 não ultrapassa $x^2/2$, já que as desigualdades acima se resumem a

$$0 \leq 1 - \cos x \leq \frac{x^2}{2}. \tag{2}$$

O próximo exemplo apresenta estimativas polinomiais relativamente mais precisas da função cosseno.

**Exemplo 2.** *Prove que*

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$$

*para todo número real $x$, sendo as desigualdades estritas para $x \neq 0$.* [4]

**Solução.** Comecemos provando que

$$\cos x < 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \tag{3}$$

para todo real *positivo* $x$.

Com efeito, definindo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right) - \cos x,$$

temos

$$f'(x) = \left(-x + \frac{x^3}{3!}\right) + \operatorname{sen} x$$

[4] Tais desigualdades significam que o erro ao se aproximar (por excesso) $\cos x$ por $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$ é menor que ou igual a $\frac{x^6}{6!}$. Note que, para $|x| < \sqrt[4]{360} \approx 4,35$, vale $x^6/6! < x^2/2$, de forma que, para tais valores de $x$, a aproximação da qual trata o exemplo 2 produz erros menores do que aquela comentada inicialmente (2).

Portal OBMEP

e

$$f''(x) = \left( -1 + \frac{x^2}{2!} \right) + \cos x.$$

Pelo exemplo 10 da 1ª parte dessa aula, vemos que $f'' > 0$ em $(0, +\infty)$. Esse fato, aliado às relações $f(0) = f'(0) = 0$, permite, via lema 9 da aula citada, concluir que $f(x) > 0$ em $(0, +\infty)$. Mas isso é precisamente (3).

Como cada membro de (3) é uma função par, essa desigualdade continua válida se $x < 0$. Portanto,

$$\cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!},$$

com igualdade se, e só se, $x = 0$.

O argumento para provar que

$$\cos x > 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}, \quad x \neq 0,$$

é completamente similar. De fato, a regra

$$g(x) = \cos x - \left( 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \right)$$

define uma função suave $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; daqui, o leitor pode completar o argumento observando que $g(0) = g'(0) = 0$ e $g'' = f > 0$ em $(0, +\infty)$.

$\square$

**Exemplo 3.** *Um bloco de massa* 1 *kg está preso à extremidade livre de uma mola de constante* $k = 1$ *N/m. Em um certo intervalo de tempo, a mola é estendida, com velocidade constante* $v_0$, *e solta, demorando o mesmo intervalo de tempo para retornar à posição de equilíbrio, em um instante no qual o bloco adquire velocidade* $v_e$. *Mostre que*

$$\left( \frac{v_e}{v_0} \right)^2 > 5.$$

Portal OBMEP

**Solução.** Seja $x(t)$ a posição do bloco $t$ segundos após a mola ser solta. Assim, se $t_0$ segundos foi o tempo total necessário para estender a mola, então, medindo o tempo a partir do instante em que ela foi solta, a hipótese garante que o bloco retorna ao ponto de equilíbrio no instante $t_0$, de modo que $x(t_0) = 0$ e $x'(t_0) = v_e$. Além disso, vale $x(0) = v_0 t_0$ e $x'(0) = v_0$.

Com essas informações, a equação (1) dá

$$x(t) = v_0(t_0 \cos t + \operatorname{sen} t).$$

Portanto,

$$x'(t) = v_0(-t_0 \operatorname{sen} t + \cos t),$$

de sorte que

$$\frac{v_e}{v_0} = \frac{x'(t_0)}{v_0} = \cos t_0 + t_0(-\operatorname{sen} t_0).$$

A partir de $x(t_0) = 0$, obtemos $-\operatorname{sen} t_0 = t_0 \cos t_0$. Substituindo essa relação na igualdade acima, segue que

$$\frac{v_e}{v_0} = (1 + t_0^2)\cos t_0. \tag{4}$$

`Afirmação 1`: $\cos^2 t_0 \cdot (1 + t_0^2) = 1$.

Com efeito, invocando mais uma vez a relação $-\operatorname{sen} t_0 = t_0 \cos t_0$, vem que

$$\begin{aligned} \cos^2 t_0 \cdot (1 + t_0^2) &= \cos^2 t_0 + (t_0 \cos t_0)^2 \\ &= \cos^2 t_0 + \operatorname{sen}^2 t_0 = 1. \end{aligned}$$

`Afirmação 2`: $t_0 > 2$.

Observe que $x(t) > 0$ para todo $t \in [0, \pi/2]$. Daí, sendo $t_0$ a menor raiz positiva da equação $x(t) = 0$, devemos ter $t_0 > \pi/2$. Como

$$x(\pi/2) = v_0 > 0 > -t_0 v_0 = x(\pi),$$

o TVI garante a existência de uma raiz $t' \in (\pi/2, \pi)$ para a equação $x(t) = 0$, de forma que $t_0 \leq t'$ [5]. Portanto, podemos afirmar que $t_0$ e 2 são arcos do 2ª quadrante (aberto) $(\pi/2, \pi)$.

[5] Na verdade, $t_0 = t'$, pois $x$ é descrescente, logo injetiva, em $[\pi/2, \pi]$, já que nesse intervalo vale a desigualdade $x' < 0$.



Portal OBMEP

Notando que a função cosseno é decrescente no 2º quadrante, se fosse $t_0 \leq 2$, o exemplo 2 implicaria

$$\cos t_0 \geq \cos 2 > 1 - \frac{2^2}{2} + \frac{2^4}{24} - \frac{2^6}{720} = -\frac{19}{45}.$$

Como $t_0 \in (\pi/2, \pi)$, temos $0 < \cos t_0 > -\frac{19}{45}$. Então, a desigualdade $t_0 \leq 2$, juntamente com a 1ª afirmação, dariam

$$\frac{1}{5} \leq \frac{1}{1+t_0^2} = \cos^2 t_0 < \left(\frac{19}{45}\right)^2,$$

gerando a contradição $405 = 45^2/5 < 19^2 = 361$. A 2ª afirmação está, pois, demonstrada.

O desfecho da solução é, agora, uma aplicação imediata de (4) e das afirmações acima:

$$\begin{aligned}\left(\frac{v_e}{v_0}\right)^2 &= (1+t_0^2)^2 \cos^2 t_0 = (1+t_0^2)^2 \cdot \frac{1}{1+t_0^2} \\ &= 1 + t_0^2 > 1 + 2^2 = 5.\end{aligned}$$

$\square$

De acordo com o exemplo 4 da 1ª parte dessa aula, a função seno é estritamente côncava no intervalo $[0, \pi]$. Portanto, pela desigualdade de Jensen [6], se $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ forem arcos do intervalo $[0, \pi]$, então

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha_1 + \cdots + \operatorname{sen}\alpha_n}{n} \leq \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}{n}\right). \qquad (5)$$

Além disso, ocorre a igualdade em (5) se, e só se, todos os números $\alpha_i$ forem iguais.

Desse modo, se $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ forem os ângulos de um triângulo $T$, valerá

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha_1 + \operatorname{sen}\alpha_2 + \operatorname{sen}\alpha_3}{3} \leq \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

[6] Vide teorema 13 da aula *Propriedades - Parte III* do módulo *Derivada como Função*.

Portal OBMEP

pois $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi$. Portanto,

$$\operatorname{sen}\alpha_1 + \operatorname{sen}\alpha_2 + \operatorname{sen}\alpha_3 \le \frac{3\sqrt{3}}{2}, \tag{6}$$

com igualdade se, e só se, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \pi/3$, o que equivale a $T$ ser um triângulo equilátero.

**Exemplo 4.** *O triângulo $T$ tem lados de comprimento $a, b, c$ e o raio do círculo circunscrito a $T$ mede $R$. Mostre que*

$$a + b + c \le 3\sqrt{3}R, \tag{7}$$

*valendo a igualdade se, e somente se, $T$ for equilátero.*

**Solução.** Digamos que os ângulos opostos aos lados (de medidas) $a, b, c$ meçam $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, respectivamente. Pela Lei dos Senos,

$$a = 2R\operatorname{sen}\alpha_1, \quad b = 2R\operatorname{sen}\alpha_2 \ \text{ e } \ c = 2R\operatorname{sen}\alpha_3.$$

Logo, por (6),

$$\begin{aligned} a + b + c &= (\operatorname{sen}\alpha_1 + \operatorname{sen}\alpha_2 + \operatorname{sen}\alpha_3)2R \\ &\le \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 2R = 3\sqrt{3}R, \end{aligned}$$

com igualdade apenas no caso em que $T$ é equilátero. $\square$

Para reais positivos quaisquer $a$, $b$ e $c$, algumas aplicações da desigualdade entre as médias fornecem

$$\frac{abc}{a^2 + b^2 + c^2} \le \frac{a + b + c}{9}. \tag{8}$$

Realmente, aplicando a desigualdade para as ternas

$$(a/bc, b/ac, c/ab) \text{ e } (a, b, c),$$

vem que

$$\begin{aligned} \frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc} &= \frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab} \\ &\ge 3\sqrt[3]{\frac{abc}{(abc)^2}} = \frac{3}{\sqrt[3]{abc}}. \end{aligned}$$

Portal OBMEP

Em seguida, aplicando a mesma desigualdade para a terna $(a, b, c)$, continuamos a estimativa acima, obtendo

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{abc} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{abc}} \geq \frac{3}{\frac{a+b+c}{3}} = \frac{9}{a+b+c}.$$

A partir daí, (8) segue imediatamente.

Suponha, agora, que $a$, $b$ e $c$ sejam novamente os comprimentos dos lados de um triângulo. Então, (8) e (7) dão

$$\frac{abc}{a^2+b^2+c^2} \leq \frac{a+b+c}{9} \leq \frac{3\sqrt{3}R}{9} = \frac{\sqrt{3}R}{3}$$

ou, o que é o mesmo,

$$\frac{abc}{4R} \leq \frac{\sqrt{3}(a^2+b^2+c^2)}{12}.$$

Note que vale a igualdade se, e só se, tivermos igualdade em (8) e (7), isto é, se, e só se, $T$ for equilátero (verifique!).

Observando que $abc/4R$ é a área de $T$, o argumento acima demonstrou a seguinte

**Proposição 5** (Desigualdade de Weitzenböck[7]). *Se $a, b, c$ são os lados de um triângulo de área $S$, então*

$$S \leq \frac{\sqrt{3}(a^2+b^2+c^2)}{12},$$

*com igualdade se, e somente se, o triângulo for equilátero.*

Para o último exemplo, precisaremos do seguinte resultado, conhecido como *teorema de Ceva trigonométrico*: se $P$ for um ponto interior ao triângulo $ABC$, então, nas notações da figura a seguir, vale

$$\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\gamma = \operatorname{sen}\alpha' \operatorname{sen}\beta' \operatorname{sen}\gamma'. \tag{9}$$

[7] Problema 2 da 3ª IMO (1961).

Portal OBMEP

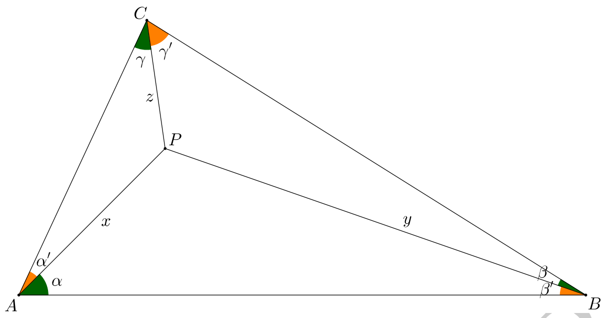



Figura 1: exemplo 6.

Essa relação pode ser provada com ajuda da Lei dos Senos. De fato, sejam $x = \overline{AP}, y = \overline{BP}, z = \overline{CP}$. No triângulo $PAB$, temos

$$\frac{x}{\operatorname{sen}\beta'} = \frac{y}{\operatorname{sen}\alpha} \Leftrightarrow x \operatorname{sen}\alpha = y \operatorname{sen}\beta'.$$

Analogamente, podemos escrever, em relação aos triângulos $PBC, PCA$,

$$y \operatorname{sen}\beta = z \operatorname{sen}\gamma' \quad \text{e} \quad z \operatorname{sen}\gamma = x \operatorname{sen}\alpha'.$$

Multiplicando essas três igualdades membro a membro, vem que

$$xyz \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\gamma = xyz \operatorname{sen}\alpha' \operatorname{sen}\beta' \operatorname{sen}\gamma',$$

o que, cancelando o fator $xyz$, fornece (9).

**Exemplo 6** (IMO - 1991). *Seja $P$ um ponto interior a um triângulo $ABC$. Mostre que pelo menos um dos ângulos $\angle PAB, \angle PBC, \angle PCA$ tem medida menor ou igual a $30°$.*

**Solução.** [8] Ainda tomando a figura acima como referência, caso tenhamos $\alpha + \beta + \gamma \leq \pi/2$, algum dos ângulos $\alpha, \beta$ ou $\gamma$ será menor que ou igual a $\pi/6$ (porque?) e a solução estará encerrada.

[8] Baseada na solução apresentada em [1].

Portal OBMEP

Caso contrário, teremos $\alpha+\beta+\gamma > \pi/2$ e, portanto,

$$\alpha' + \beta' + \gamma' = \pi - (\alpha+\beta+\gamma) < \frac{\pi}{2},$$

de sorte que

$$\frac{\alpha' + \beta' + \gamma'}{3} < \frac{\frac{\pi}{2}}{3} = \frac{\pi}{6}. \tag{10}$$

Logo, por (9), (5), (10) e pela desigualdade entre as médias, segue que

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\gamma &= \operatorname{sen}\alpha' \operatorname{sen}\beta' \operatorname{sen}\gamma' \\ &\leq \left(\frac{\operatorname{sen}\alpha' + \operatorname{sen}\beta' + \operatorname{sen}\gamma'}{3}\right)^3 \\ &\leq \operatorname{sen}^3\left(\frac{\alpha' + \beta' + \gamma'}{3}\right) \\ &< \operatorname{sen}^3(\pi/6) = \frac{1}{8}.\end{aligned}$$

Dessa forma, algum dos números positivos $\operatorname{sen}\alpha$, $\operatorname{sen}\beta$, $\operatorname{sen}\gamma$ deve ser menor que 1/2, pois, do contrário, o produto deles seria maior que 1/8, contradizendo a desigualdade acima. Sem perda de generalidade, suponhamos $\operatorname{sen}\alpha < 1/2$. Como $\alpha \in (0,\pi)$, a desigualdade anterior implica $\alpha < \pi/6$ ou $\alpha > 5\pi/6$ [9]. No primeiro caso, o ângulo $\angle PAB$ tem medida menor que $30°$; no segundo, levando em conta que $\alpha+\beta+\gamma < \pi$, vale $\beta+\gamma < \pi/6$, de modo que $\angle PBC$ e $\angle PCA$ têm medidas menores que $30°$. □

## Dicas para o Professor

Na solução do exemplo 3, a estimativa da quantidade $(v_e/v_0)^2$ dependeu de uma aproximação por falta do instante $t_0$ de retorno do bloco à posição de equilíbrio. Como $t_0 = -\operatorname{tg} t_0 \in (\pi/2, \pi)$, podemos utilizar o software *GeoGebra* para

[9] Observe que ângulos de medidas $\pi/6$ e $5\pi/6$ radianos equivalem a $30°$ e $150°$, respectivamente.

Portal OBMEP

obter $t_0 \approx 2,028$, com três casas decimais exatas. Assim, o erro da aproximação utilizada no texto, $t_0 \approx 2$, é menor que três centésimos.

As aproximações polinomiais da função cosseno expostas até aqui podem ser generalizadas do seguinte modo: *para cada inteiro $n \geq 0$, pondo $P_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$, tem-se*

$$P_{4n+2}(x) \leq \cos x \leq P_{4n}(x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

*Além disso, a igualdade ocorre em qualquer uma dessas desigualdades se, e só se, $x = 0$.*

Pode ser instrutivo convidar os alunos a demonstrar essas desigualdades por indução matemática, utilizando a mesma técnica explorada na solução do exemplo 2.

A próxima figura mostra como os gráficos das funções polinomiais $P_{2n}$, para $1 \leq n \leq 4$, vão se moldando, em torno da origem, ao gráfico da função cosseno [10].

Na linguagem da *Teoria de Séries*, as desigualdades acima permitem, para cada número real $x$, expressar $\cos x$ como uma soma infinita, a saber,

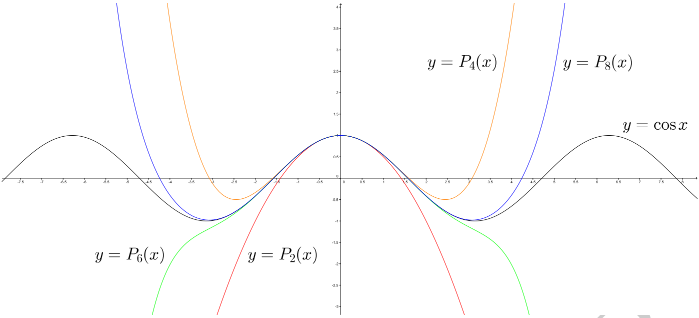
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \cdots \tag{11}$$

Para a função seno, temos

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \cdots \tag{12}$$

[10] Na literatura, $P_{2n}$ é chamado *polinômio de Taylor de ordem $2n$, em torno da origem,* da função cosseno. Há um estudo geral de polinômios de Taylor para funções elementares, que pode ser encontrado em diversos livros de Cálculo/Análise. Em resumo, se $f$ é uma função $n$ vezes derivável em $a$, o *polinômio de Taylor de ordem $n$, em torno de $a$*, de $f$ é o único polinômio de grau $\leq n$ cujas derivadas no ponto $a$, até ordem $n$ (inclusive), coincidem com as respectivas derivadas de $f$ em $a$. Para $n = 1$, tal polinômio nada mais é que a função afim cujo gráfico é a reta tangente (ao gráfico) de $f$ em $(a, f(a))$. A exemplo do que ocorre com a função cosseno, em torno da origem, a sequência de polinômios de Taylor de $f$ em torno de $a$ tende a produzir aproximações polinomiais cada vez melhores de $f$, numa vizinhança fixada do ponto $a$. Para o leitor interessado, já familiarizado com o conteúdo de séries de números reais, bem como o teorema do valor médio, recomendamos a leitura da seção 5.3 da referência [2].

Portal OBMEP




Estamos aqui, caro leitor, diante da possibilidade de oferecer a definição mais rigorosa, porém desprovida de significado geométrico, das funções cos e sen: são as funções reais de uma variável real cujas regras se expressam por (11) e (12), respectivamente. Nessa abordagem [11], *todas* as propriedades (funcionais) das funções trigonométricas seguem, em última análise, apenas das relações (11) e (12).

Se $p$ é o semiperímetro de um triângulo $ABC$ cujo raio da circunferência inscrita é $r$, então $p \geq 3\sqrt{3}r$, com igualdade se, e só se, $ABC$ for equilátero. Essa desigualdade foi provada na aula *Propriedade Geral* do módulo *Determinantes como Áreas - Parte II*. Assim, pelo exemplo 7, segue que

$$3\sqrt{3}R \geq 2p \geq 2 \cdot 3\sqrt{3}r,$$

logo,

$$R \geq 2r.$$

Essa é a *desigualdade de Euler*: *em qualquer triângulo, o raio da circunferência circunscrita é pelo menos o dobro do raio da circunferência inscrita, ocorrendo a igualdade se, e somente se, o triângulo for equilátero.*

Duas ou três sessões de 50min devem ser suficientes para expor o conteúdo desse material.

[11] Confira a seção 12.4 da referência [3].

Portal OBMEP

# Sugestões de Leitura Complementar


1. Titu Andreescu, Zuming Feng. *103 Trigonometry Problems*. Birkhäuser, 2005.

2. A. Caminha. *Fundamentos de Cálculo*, 2ª ed. Rio de Janeiro: SBM, Rio de Janeiro, 2022.

3. E. L. Lima. *Análise Real, vol. 1: Funções de uma Variável*. 13ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2020.


Portal OBMEP