Material Teórico - Módulo Equações Algébricas-Propriedades das Raízes

O Teorema de Decomposição

Terceiro Ano do Ensino Médio

Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

18 de setembro de 2021

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 O teorema de decomposição e a multiplicidade de raízes

Nesta aula, centraremos nossa atenção na resolução de mais exercícios sobre o teorema de decomposição e sobre a multiplicidade de raízes de polinômios. Antes disso, exploramos brevemente, mais uma vez, a relação entre esses dois tópicos.

Na aula passada, vimos duas maneiras diferentes de definir a multiplicidade de uma raiz de um polinômio. A mais formal foi a seguinte.

Definição 1. *Seja r uma raiz de um polinômio $p(x)$. Dizemos que r tem multiplicidade m (em que m é um natural) quando $p(x) = (x-r)^m\, q(x)$ e $q(r) \neq 0$, ou seja, r* não *é raiz de $q(x)$. Veja que m é o maior natural tal que o resto da divisão de $p(x)$ por $(x-r)^m$ é igual a zero.*

Uma raiz de um polinômio $p(x)$ que possui multiplicidade maior ou igual a 2 é chamada simplesmente de **raiz múltipla** de $p(x)$.

Relembre, também, o teorema de decomposição.

Teorema 2 (teorema de decomposição). *Todo polinômio não nulo, com coeficientes complexos e de grau n, pode ser expresso na forma fatorada como*

$$p(x) = c(x-r_1)(x-r_2)\cdot \ldots \cdot (x-r_n),$$

em que c é um número complexo e $r_1, r_2, \ldots, r_n$ são as raízes complexas de $p(x)$ (não necessariamente distintas). Além disso, essa fatoração é única, a menos da ordem dos fatores.

A segunda maneira de definir multiplicidade de uma raiz r de um polinômio $p(x)$ é por intermédio do teorema de decomposição, contando quantas vezes o fator $x - r$ aparece na lista de fatores da decomposição de $p(x)$. Nesta aula, vamos argumentar por que esta definição é equivalente à Definição 1.

Mais precisamente, podemos tomar a forma fatorada dada pelo teorema acima

$$p(x) = c(x - r_1) \dots (x - r_n)$$

e agrupar as raízes repetidas para escrever este produto na seguinte forma:

$$p(x) = c(x - z_1)^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot c(x - z_k)^{\alpha_k}, \tag{1}$$

em que $z_1, \dots, z_k$ são raízes distintas de $p(x)$ e $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ são inteiros. Claramente, expandindo o produto acima e observando o grau do polinômio $p(x)$ temos também que $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k = n$.

Exemplo 3. *Suponha que*

$$p(x) = 3(x - 1)(x - 5)(x + 7)(x - 1)(x - 1)(x + 5)(x + 7).$$

Podemos reordenar os fatores de $p(x)$ de modo que fatores iguais apareçam consecutivamente. Daí,

$$p(x) = 3(x - 1)(x - 1)(x - 1)(x - 5)(x + 5)(x + 7)(x + 7).$$

Por sua vez, a expressão acima equivale a:

$$p(x) = 3(x - 1)^3(x - 5)(x + 5)(x + 7)^2.$$

Queremos argumentar que, no formato da equação (1), os expoentes $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ são as respectivas multiplicidades, das raízes $z_1, \dots, z_k$. Ademais, $\alpha_1 + \ldots + \alpha_k = n$. Sem perda da generalidade, basta observar que α_1 é a multiplicidade de z_1.

Claramente, fazendo

$$q(x) = c(x - z_2)^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot c(x - z_k)^{\alpha_k},$$

como z_1 é diferente de cada um dos números $z_2, \dots, z_k$, temos que

$$q(z_1) = c(x - z_2)^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot c(x - z_k)^{\alpha_k} \neq 0.$$

Além disso, temos que

$$p(x) = (x - z_1)^{\alpha_1} q(x).$$

Comparando com o que foi dado na Definição 1, temos que a multiplicidade de z_1 é $m = \alpha_1$, como queríamos demonstrar.

Exemplo 4. *Em relação ao mesmo polinômio do exemplo 3,* $p(x) = 3(x-1)^3(x-5)(x+5)(x+7)^2$, *concluímos que* $p(x)$ *possui* 4 *raízes distintas, a saber:*

(i) *A raiz* 1 *com multiplicidade* 3.

(ii) *A raiz* 5 *com multiplicidade* 1.

(iii) *A raiz* -5 *com multiplicidade* 1.

(iv) *A raiz* -7 *com multiplicidade* 2.

2 Exercícios

Exemplo 5. *Qual o grau da equação polinomial* $p(x) = 0$ *cujas raízes são* 3, 2 *e* 4 *com multiplicidades* 5, 6 *e* 10, *respectivamente?*

Solução. Veja que, pela definição de multiplicidade, temos:

$$P(x) = c(x-3)^5(x-2)^6(x-4)^{10},$$

em que c é uma constante complexa que não conhecemos.

O grau de $P(x)$ é dado pela soma das multiplicidades de suas raízes:

$$5 + 6 + 10 = 21.$$

□

Exemplo 6. *Qual a multiplicidade da raiz* $x = 1$ *da equação*

$$x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2 = 0\ ?$$

Solução. Sabendo que 1 é raiz desta equação, ao dividir o polinômio $p(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2$ por $x - 1$ obteremos resto zero, ou seja, $p(x) = (x-1)\, q_1(x)$ para algum polinômio $q_1(x)$. Podemos calcular $q_1(x)$ usando dispositivo de Briot-Ruffini:

$$\begin{array}{c|ccccc} 1 & 1 & -1 & -3 & 5 & -2 \\ \hline & 1 & 0 & -3 & 2 & \boxed{0} \end{array}.$$

Ele comprova que o resto da divisão é 0 e nos diz que

$$q_1(x) = x^3 - 3x + 2.$$

Agora, para saber se $x = 1$ é raiz múltipla de $p(x)$, temos que testar se 1 é raiz de $q_1(x)$, o que novamente pode ser feito via Briot-Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & \color{blue}{0} \end{array}.$$

Uma vez que obtivemos resto 0 e quociente $q_2(x) = x^2 + x - 2$, até agora temos que:

$$p(x) = (x-1)^2(x^2 + x - 2).$$

Agora queremos saber se 1 também é raiz de $q_2(x) = x^2 + x - 2$, o que novamente percebemos ser válido pois:

$$\begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 2 & \color{blue}{0} \end{array},$$

o que indica que $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$. Logo,

$$p(x) = (x-1)^3(x+2).$$

Finalmente, temos que checar se 1 é raiz de $q_3(x) = x + 2$ o que, dessa vez, claramente não é verdade, pois $q_3(1) = 3$. Equivalentemente:

$$\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 2 \\ \hline & 1 & \color{blue}{3} \end{array}.$$

Logo a multiplicidade da raiz 1 do polinômio $p(x)$ é igual a três. $\square$

Observação 7. *Em geral, para obter a multiplicidade de uma raiz, podemos aplicar Briot-Ruffini sucessivas vezes até obter resto da divisão diferente de zero. A multiplicidade será a quantidade de vezes em que obtenhamos resto zero.*

Tais aplicações sucessivas de Briot-Rufini podem ser executadas em uma única tabela, sem a necessidade de repetir todo o quociente em um dispositivo separado. Isso torna a solução acima bem mais compacta. Veja abaixo o resultado, com os mesmos número da solução do exemplo anterior. Indicamos, na coluna da esquerda, o candidato a raiz que estamos testando (neste exemplo, sempre o número 1*), e circulamos em cada linha o resto obtido (neste exemplo, o resto da divisão por* $x - 1$*).*

1	1	-1	-3	5	-2
1	1	0	-3	2	0
1	1	1	-2	0	
1	1	2	0		
1	1	3			

Exemplo 8. *Sabendo que* $x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 6x^2 + x - 3 = 0$ *apresenta* i *e* $-i$ *como raízes duplas, calcule a outra raiz.*

Solução 1. Seja $p(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 6x^2 + x - 3$. Como i e $-i$ são raízes duplas do polinômio $p(x)$, temos que:

$$p(x) = (x - i)^2\,(x + i)^2\,q(x),$$

para algum polinômio $q(x)$. Ademais, como $p(x)$ tem grau 5 e a expansão de $(x - i)^2\,(x + i)^2$ nos dá um polinômio de grau 4, seque $q(x)$ tem grau 1. Assim, a raiz que $p(x)$ que estamos a procurar é a única raiz de $q(x)$.

Veja que

$$\begin{aligned}(x - i)^2\,(x + i)^2 &= \big((x - i)(x + i)\big)^2\\ &= (x^2 + 1)^2\\ &= x^4 + 2x^2 + 1.\end{aligned}$$

Ou seja,

$$p(x) = (x^4 + 2x^2 + 1)q(x).$$

Para calcular $q(x)$ basta executar o algoritmo da divisão Euclidiana de $p(x)$ por $x^4 + 2x^2 + 1$. Veja:

$$
\begin{array}{rrrrrrr|l}
 & x^5 & -3x^4 & +2x^3 & -6x^2 & +x & -3 & x^4 + 2x^2 + 1. \\
\cline{8-8}
- & x^5 & & -2x^3 & & -x & & x - 3 \\
\cline{1-6}
 & & -3x^4 & & -6x^2 & & -3 & \\
 & & 3x^4 & & +6x^2 & & +3 & \\
\cline{3-7}
 & & & & & & 0 &
\end{array}
$$

Assim, obtemos resto 0 e quociente $q(x) = x - 3$.

Concluímos que a outra raiz da equação do enunciado (e do polinômio $p(x)$) é igual a 3. $\square$

Solução 2. Nas notações da solução anterior, uma vez que $q(x)$ tem grau 1 e tanto $p(x)$ quanto $(x-i)^2(x+i)^2$ têm coeficientes líderes iguais a 1, temos $q(x) = x - r$, em que r é justamente a raiz que desejamos calcular. Assim,

$$p(x) = (x-i)^2(x+i)^2(x-r).$$

Agora, comparando os coeficientes constantes em ambos os lados da igualdade acima, obtemos

$$-3 = i^2 i^2(-r),$$

logo, $r = 3$. $\square$

Para o enunciado e a demonstração do próximo resultado, precisaremos da noção de derivade de um polinômio, a qual pode ser encontrada no material teórico da aula passada.

Teorema 9. *Seja $f(x)$ um polinômio não identicamente nulo e $f'(x)$ sua derivada. Se z for raiz múltipla de $f(x)$, então z também é raiz de $f'(x)$.*

Solução. Na aula passada vimos que, se z é uma raiz de $f(x)$ que possui multiplicidade m, então z é raiz de $f'(x)$ com multiplicidade $m - 1$. Como sabemos que z é uma raiz múltipla de $f(x)$, temos que $m \geq 2$. Logo, $m - 1 \geq 1$. Ou seja, z é raiz de $f'(x)$. $\square$

Exemplo 10. *Prove que, para todo inteiro n positivo, o polinômio*

$$p(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

não possui raízes múltiplas.

Solução. Seja $p(x)$ como no enunciado e suponha, por contradição, que z fosse uma raiz múltipla de $p(x)$. Pelo Teorema 9, temos que $p(z) = p'(z) = 0$.

Por outro lado, observe que

$$p'(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Logo,

$$p(x) = p'(x) + \frac{x^n}{n!},$$

para todo x.

Substituindo x por z, obtemos que:

$$0 = 0 + \frac{z^n}{n!}.$$

Logo, $z = 0$. Contudo, 0 não é raiz de $p(x)$ já que $p(0) = 1$, de forma que chegamos a uma contradição. □

Exemplo 11. *Calcule as raízes de $p(x) = 4x^3 - 8x^2 + 5x - 1$, sabendo que ele possui pelo menos uma raiz de multiplicidade 2.*

Solução. Se z é a raiz de multiplicidade 2 de $p(x)$, então $p'(z) = 0$. Por outro lado, note que

$$p'(x) = 12x^2 - 16x + 5.$$

Então, z é uma das raízes da equação de segundo grau $12x^2 - 16x + 5 = 0$. Tal equação possui discriminante $\Delta = (-16)^2 - 4 \cdot 12 \cdot 5 = 256 - 240 = 16$, logo, possui raízes:

$$\frac{16 \pm 4}{24} = \begin{cases} 20/24 = 5/6, \text{ ou} \\ 12/24 = 1/2. \end{cases}$$

Temos que verificar qual dessas raízes é raiz de $p(x)$. Para tanto, note que

$$\begin{aligned} p\left(\frac{1}{2}\right) &= 4\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 8\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 5\left(\frac{1}{2}\right) - 1 \\ &= \frac{1}{2} - 2 + \frac{5}{2} - 1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Da mesma forma, você pode verificar que

$$\begin{aligned} p\left(\frac{5}{6}\right) &= 4\left(\frac{5}{6}\right)^3 - 8\left(\frac{5}{6}\right)^2 + 5\left(\frac{5}{6}\right) - 1 \\ &= \frac{125}{54} - \frac{25}{27} + \frac{25}{6} - 1 \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

Logo, $1/2$ é raiz dupla de $p(x)$.

Seja r a terceira raiz de $p(x)$. Poderíamos obter r simplesmente dividindo $p(x)$ por $x - 1/2$ duas vezes e calculando a raiz do quociente. Isso, por sua vez, poderia ser feito usando Briot-Ruffini, como fizemos em problemas anteriores. Alternativamente, podemos evitar manipular frações usando as seguintes observações.

Pelo teorema de decomposição, temos

$$p(x) = c(x - 1/2)(x - 1/2)(x - r),$$

para alguma constante c. Mas veja que o coeficiente de x^3 em $p(x)$ é igual a 4. Logo, $c = 4$. Assim, podemos reescrever $p(x)$ como:

$$p(x) = (2x - 1)(2x - 1)(x - r).$$

Como $(2x-1)^2 = (4x^2 - 4x + 1)$ e $p(x) = 4x^3 - 8x^2 + 5x - 1$, basta encontrarmos r tal que:

$$4x^3 - 8x^2 + 5x - 1 = (4x^2 - 4x + 1)(x - r).$$

Isso pode ser feito dividindo o polinômio $4x^3 - 8x^2 + 5x - 1$ por $4x^2 - 4x + 1$, usando o dispositivo da Divisão Euclidiana.

Ou podemos simplesmente observar que $r = 1$ calculando o termo independente de cada lado da equação acima, como na segunda solução ao exemplo anterior. $\square$

Dicas para o Professor

O assunto deste material pode ser abordado em um encontro de 50 minutos, com a disponibilidade de tempo adicional para exercícios, caso seja necessário.

A referência [1] contém uma discussão relativamente completa e profunda sobre equações polinomiais. A referência [2] é uma agradável leitura, a qual contempla a história das tentativas de se resolver equações polinomiais.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 6: Polinômios.* SBM, Rio de Janeiro, 2016.

2. I. Stewart. *Uma História da Simetria em Matemática.* Zahar, Rio de Janeiro, 2012.