Máximo Divisor Comum

Antes de apresentar a definição formal de Máximo Divisor Comum e também antes de apresentar estratégias para o cálculo do *mdc*, veremos como esse conceito aparece naturalmente na solução de problemas contextualizados.

Exercício 1. Dois rolos de arame, um de 210 metros e outro de 330 metros, devem ser cortados em pedaços de mesmo comprimento. De que modo isto pode ser feito se desejamos que cada um destes pedaços tenha o maior comprimento possível?

Solução: Primeiramente pode-se discutir algumas possibilidades.

- Podemos cortar cada um dos rolos em pedaços de um metro, obtendo 210 pedaços de um rolo e 330 pedaços de outro rolo.
- Mas podemos obter pedaços maiores, cortando em pedaços de, digamos, três metros. Neste caso obtemos $\frac{210}{3} = 70$ pedaços de um rolo e $\frac{330}{3} = 110$ pedaços do outro rolo.
- Podemos ober um pedaço ainda maior, de 10 metros, obtendo $\frac{210}{10} = 21$ pedaços de um rolo e $\frac{330}{10} = 33$ pedaços do outro rolo.

Apesar de ser possível obter a resposta assim, por tentativas, podemos parar e pensar um pouco sobre o que estamos procurando. Queremos dividir cada um dos rolos em pedaços de, digamos, d metros. Como queremos que esta divisão seja exata, d deve ser um divisor de 210 e 330, certo? Assim, devemos procurar d na lista dos divisores comuns de 210 e 330.

- $D(210) = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14, 15, 21, 30, 35, 42, 70, 105, 210\}$
- $D(330) = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 11, 15, 22, 30, 33, 55, 66, 110, 165, 330\}$

E fazendo a interseção, obtemos os seguintes divisores comuns de 210 e 330 $\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$. Assim, considerando qualquer uma destas medidas, podemos dividir os dois rolos em pedaços do mesmo comprimento. Por exemplo, se $d = 6$ obtemos pedaços de 6 metros, dividindo um rolo em $\frac{210}{6} = 35$ pedaços e o outro rolo em $\frac{330}{6} = 55$ pedaços.

Mas, segundo o enunciado, queremos pedaços do maior comprimento possível que, segundo nossa interpretacão, deve ser o maior divisor comum dos números 210 e 330. Da lista anterior, vemos que este número é 30. Deste modo, então, podemos dividir os rolos em pedaços de 30 metros, obtendo $\frac{210}{30} = 7$ pedaços de um rolo e $\frac{330}{30} = 11$ pedaços do outro rolo.

Exercício 2. Vamos supor que precisamos remeter duas encomendas de sabonetes para dois compradores diferentes. Um pediu 420 sabonetes e outro 480 sabonetes. Entretanto, queremos condicionar os sabonetes em embalagens que sirvam para atender a estes dois pedidos, já que vamos enviar uma certa quantidade de embalagens para um comprador e uma outra quantidade de embalagens para o outro comprador. Quantos sabonetes devem caber em cada uma destas embalagens para que possamos atender as duas encomendas utilizando a menor quantidade possível de embalagens?

Solução: Como todas as embalagens contém a mesma quantidade de sabonetes, esta embalagem deve conter uma certa quantidade de sabonetes que seja um número que divida 420 e 480, certo? Vejamos alguns exemplos. Suponhamos que cada embalagem contenha dois sabonetes.

Assim, devemos enviar $\frac{420}{2} = 210$ embalagens para um comprador e $\frac{480}{2} = 240$ embalagens para o outro comprador. Mas se cada embalagem contém 5 sabonetes, precisaremos enviar menos embalagens para cada um deles: $\frac{420}{5} = 84$ embalagens para um comprador e $\frac{480}{5} = 96$ embalagens para o outro comprador. Utilizando embalagens de 10 sabonetes cada, podemos diminuir mais ainda a quantidade de embalagens a ser envidada para cada comprador: $\frac{420}{10} = 42$ embalagens para um comprador e $\frac{480}{10} = 48$ embalagens para o outro comprador. Deste modo vemos que se queremos enviar menos embalagens para cada comprador, devemos colocar a maior quantidade possível de sabonetes em cada embalagem. Como a quantidade de sabonetes em cada embalagem deve ser um divisor de 420 e 480, o número de sabonetes em cada embalagem deve ser o maior número que divide 420 e 480.

Os divisores dos números 420 e 480 são:

- $D(420) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 12, 14, 15, 20, 21, 28, 30, 35, 42, 60, 70, 84, 105, 140, 210, 420\}$
- $D(480) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 20, 24, 30, 32, 40, 48, 60, 80, 96, 120, 160, 240, 480\}$

Os divisores comuns de 420 e 480 são:

- $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$

e podemos, portanto, confeccionar embalagens com qualquer uma destas quantidades de sabonetes.

Da lista anterior vemos que o maior número que divide 420 e 480 ao mesmo tempo é igual a 60. Assim, vemos que se fizermos embalagens com 60 sabonetes teremos que enviar a menor quantidade de embalagens para atender aos dois pedidos. Neste caso deveremos enviar $\frac{420}{60} = 7$ embalagens para um comprador e $\frac{480}{60} = 8$ embalagens para o outro comprador.

Exercício 3. Um terreno retangular de $105m \times 165m$ será crcado com arame farpado fixado em estacas igualmente espaçadas. Se existe uma estaca em cada vértice do terreno, qual é o número mínimo de estacas a serem utilizadas?

Solução: Também parece interessante começar explorando este problema a partir de algumas situações mais simples.

- Podemos colocar as estacas espaçadas de um em um metro. Mas para isto vamos gastar muitas estacas.
- Não podemos colocar as estacas espaçadas de dois em dois metros, porque os lados têm comprimento ímpares.
- Como $\dfrac{105}{3} = 35$ e $\dfrac{165}{3} = 55$, podemos colocar as estacas espaçadas de três em três metros.
- Também podemos colocar as estacas espaçadas de cinco em cinco metros, pois $\dfrac{105}{5} = 21$ e $\dfrac{165}{5} = 33$. Comparando com as possibilidades anteriores, neste caso, gasta-se menos estacas.

Para não ter que ficar experimentando todas as possibilidades, observe que se d é a distância entre duas estacas consecutivas, então d deve ser um divisor de 105 e d também deve ser um divisor de 165, certo? Como queremos a maior distância possível entre as estacas, vemos que d deve ser o maior número que divide ao mesmo tempo 105 e 165. Ora, isto significa que d é o máximo divisor comum de 105 e 165. Para achar este número, podemos listar os divisores de 105, os divisores de 165 e daí podemos considerar d o maior número que aparece nestas duas listas.

- $D(105) = \{1, 3, 5, 7, 15, 21, 35, 105\}$
- $D(165) = \{1, 3, 5, 11, 15, 33, 55, 165\}$

Divisores comuns de 105 e 165, $\{1, 3, 5, 15\}$. Concluímos, então, que a distância entre duas estacas consecutivas deve ser igual a $d = 15$.

Agora vamos contar quantas estacas são necessárias. Como um lado de $105m$ fica dividido em partes de $15m$ cada, vemos que este lado fica dividido em $\dfrac{105}{15} = 7$ pedaços. Logo sobre este lado existem 2 estacas nos vértices e mais 6 estacas no interior do lado.

Já o lado de $165m$ fica dividido em partes de $15m$ cada e, portanto, fica dividido em $\dfrac{165}{15} = 11$ pedaços. Logo sobre este lado existem 2 estacas nos vértices e mais 10 estacas no interior do lado.

O número total de estacas é, portanto, igual a 4 estacas nos vértices, mais $6 + 6 = 12$ estacas no interior dos lados de $105m$ e mais $10 + 10 = 20$ estacas no interior dos lados de $165m$, totalizando $4 + 12 + 20 = 36$ estacas.

Pergunta. É possível obter o número total de estacas, 36, a partir do perímetro total $2\times105+2\times165 = 540$ do terreno e do número $15 = mdc(105, 165)$, que é a distância entre duas estacas consecutivas?

Para resolver os três exercícios anteriores foi necessário considerar o maior número que divide ao mesmo tempo dois números naturais dados. Como esta necessidade é recorrente, parece ser natural apresentar a seguinte definição para o máximo divisor comum.

Definição: $mdc(a,b)$ **é o maior divisor comum de** a **e de** b**.**

Das soluções dos exercícios anteriores vimos que:

- $mdc(210, 330) = 30$.
- $mdc(420, 480) = 60$.
- $mdc(105, 165) = 15$.

Para calcular cada um destes números, $mdc(a,b)$, listamos os divisores de a, listamos os divisores de b, selecionamos os divisores comuns de a e de b, e identificamos $mdc(a,b)$ como o maior divisor comum. Apesar deste procedimento ser geral, isto é, teoricamente poder ser aplicado para todos os números, na prática ele fica inviável, pois pode ser muito difícil listar todos os divisores de um número dado. Esta dificuldade reside, essencialmente, no fato de não ser fácil identificar se um certo número é primo ou não. Por exemplo, tente listar o conjunto de divisores dos números 241, 997 e 3421. Nas próximas seções veremos outras maneiras mais eficientes para o cálculo do *mdc*. Entretanto, antes de começar esta parte mais técnica, parece ser interessante apresentar o conceito de *mmc*, uma vez que algumas estratégias para os cálculos do *mdc* e do *mmc* são similares.

Mínimo Múltiplo Comum

Vejamos como o conceito de Mínimo Múltiplo Comum aparece naturalmente durante a análise de algumas situações bem interessantes.

Exercício 4. Uma lâmpada pisca de 14 em 14 segundos e uma outra lâmpada pisca de 20 em 20 segundos. Um cronômetro zerado foi ligado exatamente quando estas lâmpadas piscam juntas. Se o cronômetro foi desligado na primeira vez em que as lâmpadas piscaram juntas novamente, que tempo ele marcou?

Solução: Como uma das lâmpadas pisca de 14 em 14 segundos, ela vai piscar nos instantes 0, 14, 28, 42,... ou seja, em todos os números que são múltiplos de 14. De modo análogo, a lâmpada que pisca de 20 em 20 segundos vai piscar em todos os instantes que são múltiplos de 20.

Os múltiplos positivos de 14 e 20 são:

- $M(14) = \{14, 28, 42, 56, 70, 84, 98, 112, 126, 140, 154, 168, ...\}$.
- $M(20) = \{20, 40, 60, 80, 100, 120, 140, 160, 180, 200, 220, 240, ...\}$.

Desta observação vemos que as lâmpadas vão piscar juntas em todos os instantes que são múltiplos comuns de 14 e de 20. Como queremos determinar o primeiro instante que elas vão piscar juntas, identificamos este instante como o menor múltiplo comum de 14 e de 20. Analisando os conjuntos dos múltiplos de 14 e 20, vemos que este instante é igual a 140 segundos. Ou seja, após o cronômetro ser ligado, as lâmpadas vão piscar juntas pela primeira vez após 2 minutos e 20 segundos.

Exercício 5. Dois ciclistas correm numa pista circular e gastam, respectivamente, 30 segundos e 35 segundos para completar uma volta na pista. Eles partem do mesmo local e no mesmo instante. Após algum tempo os dois atletas se encontram, pela primeira vez, no local de largada. Neste momento, o atleta mais veloz estará completando quantas voltas? E o menos veloz? Depois de quanto tempo da largada ocorrerá o encontro?

Solução: O atleta mais veloz passará pela linha de largada pela primeira vez após 30 segundos, pela segunda vez após 60 segundos, pela terceira vez após 90 segundos, e assim por diante. Ou seja, este atleta passará pela linha de largada nos instantes que são múltiplos de 30.

- $M(30) = \{30, 60, 90, 120, 150, 180, 210, 240, 270, 300, 330, 360, ...\}$.

De modo análogo vemos que o outro atleta passará pela linha de largada nos instantes que são muúltiplos de 35.

- $M(35) = \{35, 70, 105, 140, 175, 210, 245, 280, 315, 350, 385, 420, ...\}$.

Portanto, eles estarão juntos na linha de largada em todos os instantes que são múltiplos comuns de 30 e de 35. Como queremos o primeiro instante que isto vai ocorrer, identificamos este instante como o menor múltiplo comum de 30 e de 35. Analisando os conjuntos $M(30)$ e $M(35)$ vemos que o menor número que aparece nestes dois conjuntos é o 210. Portanto, os dois atletas vão se encontrar pela primeira vez na linha de largada após 210 segundos de dada largada, ou seja, após 3 minutos e 30 segundos. Neste instante o atleta mais veloz estará completando $\dfrac{210}{30} = 7$ voltas, enquanto o outro atleta estará completando $\dfrac{210}{35} = 6$ voltas.

Exercício 6. Duas engrenagens A e B têm 16 e 28 dentes, respectivamente. Elas estão encaixadas de modo que um motor ligado à engrenagem A a faz girar no sentido horário e esta faz a engrenagem B girar no sentido anti-horário. Se a engrenagem A realiza uma revolução por minuto, após quanto tempo de o motor ter sido ligado as duas engrenagens retornarão a posição inicial?

Solução: Vamos focar nossa atenção para o ponto T em que as duas engrenagens estão encaixadas. Como elas giram simultaneamente, a quantidade de dentes que passa por T de uma engrenagem é igual a quantidade de dentes que passa por T da outra engrenagem. Após uma volta da engrenagem A, passam por T os 16 dentes de A. Após duas voltas de A, passam por T 32 dentes de A. Após a terceira volta de A, passam por T um total de 38 dentes de A. E assim, sucessivamente, vemos que a cada volta de A, o número de dentes de A

que passam por T é um múltiplo de 16.

- $M(16) = \{16, 32, 48, 64, 80, 96, 112, 128, 144, 160, 176, 192, ...\}$.

De modo análogo, a cada volta da engrenagem B, o número de dentes de B que passam por T é um múltiplo de 28.

- $M(28) = \{28, 56, 84, 112, 140, 168, 196, 224, 252, 280, 308, 336, ...\}$.

Para cada número de $M(16)$ a engrenagem A completa uma certa quantidade de voltas completas, e para cada número de $M(28)$ a engrenagem B também completa uma certa quantidade de voltas completas. Assim, se um número pertence tanto a $M(16)$ quanto a $M(28)$ estamos em uma situação que as duas engrenagem dão voltas completas e, portanto, ambas voltaram à posição inicial. Como queremos determinar o primeiro instante em que isso ocorre, queremos o menor número que pertence tanto a $M(16)$ quanto a $M(28)$, ou seja, queremos o menor múltiplo comum de 16 e 28. Observando os conjuntos acima, vemos que este número é 112.

Para essa quantidade de dentes, vemos que a engrenagem A completa $\dfrac{112}{16} = 7$ voltas e a engrenagem B completa $\dfrac{112}{28} = 4$ voltas. Como a engrenagem A realiza uma volta por minuto concluímos, então, que as engrenagens retornam à posicão inicial pela primeira vez após 7 minutos.

Para resolver os três exercícios anteriores, foi necessário considerar o menor número que é ao mesmo tempo um múltiplo de dois números naturais dados. Este é o mínimo múltiplo comum.

Definição: $mmc(a, b)$ é o menor múltiplo comum de a e de b.

De acordo com os exercícios anteriores, temos:

- $mmc(14, 20) = 140$.
- $mmc(30, 35) = 210$.
- $mmc(16, 28) = 112$.

Para calcular cada um desses números, $mmc(a, b)$, listamos os múltiplos de a, listamos os múltiplos de b, e identificamos o $mmc(a, b)$ como o menor múltiplo comum. Como no caso do *mdc*, apesar desse procedimento ser geral, na prática ele pode ser muito trabalhoso, pois podem aparecer números muito grandes, uma vez que pode demorar muito até aparecer o primeiro múltiplo comum. Dessa dificuldade surge a necessidade de estudar outras estratégias para o cálculo do *mmc*.

Cálculo do *mdc* e do *mmc*: dada a fatoração

Nos exercícios anteriores vimos que é possível, apesar de muito trabalhoso, calcular o *mmc* e o *mdc* utilizando apenas as definições destes conceitos. Agora, utilizando as propriedades dos números naturais vistas nos encontros anteriores, veremos estratégias mais eficientes para o cálculo destes números.

Antes de apresentar uma estratégia para o cálculo do *mdc* e do *mmc* de dois números já fatorados como produtos de números primos, vamos relembrar, nos exercícios seguintes, algumas propriedades apresentadas no encontro anterior.

Exercício 7. Se $a = 2^3 \times 5 \times 7^2$ identifique quais dos seguintes números são divisores de a.

Solução: Para que d seja um divisor de a, deve existir um número n tal que $nd = a = 2^3 \times 5 \times 7^2$. Daí vemos que d só pode ter fatores primos 2, 5 e 7, ou seja d tem a forma $d = 2^x \times 5^y \times 7^z$. Mais ainda, como, ao efetuar o produto nd, os expoentes x, y e z só podem aumentar, vemos que $x \leq 3$, $y \leq 1$ e $z \leq 2$.

Os próximos exercícios ajudam a estabelecer uma estratégia para o cálculo do *mdc*.

Exercício 8. Se $a = 2^2 \times 3 \times 5$ e $b = 2^3 \times 5^2$, liste os divisores comuns de a e de b.

Solução: Se d é um divisor de a, os únicos fatores primos de d são 2, 3 e 5. Se d é um divisor de b, os únicos fatores primos de d são 2 e 5. E, se d é um divisor comum de a e b, fazendo a interseção, vemos que os únicos fatores primos de d são 2 e 5. Assim $d = 2^x \times 5^y$. O número x não pode ser maior que 2 e 3, que são os expoentes do fator primo 2 nas fatorações de a e de b. Logo, no máximo podemos pegar $x = 2$. De modo análogo, o número y não pode ser maior que 1 e 2, expoentes do fator primo 5 nas fatora¸c˜oes de a e de b e assim, no máximo podemos pegar $y = 1$. Assim, vemos que $x \in \{0, 1, 2\}$ e $y \in \{0, 1\}$. Fazendo todas as possibilidades, podemos listar os divisores comuns de a e de b.

$$
\begin{array}{lcl}
x = 0 \text{ e } y = 0 & \Rightarrow & d = 2^0\,5^0 = 1. \\
x = 0 \text{ e } y = 1 & \Rightarrow & d = 2^0\,5^1 = 5. \\
x = 1 \text{ e } y = 0 & \Rightarrow & d = 2^1\,5^0 = 2. \\
x = 1 \text{ e } y = 1 & \Rightarrow & d = 2^1\,5^1 = 10. \\
x = 2 \text{ e } y = 0 & \Rightarrow & d = 2^2\,5^0 = 4. \\
x = 2 \text{ e } y = 1 & \Rightarrow & d = 2^2\,5^1 = 20.
\end{array}
$$

Desta lista de divisores comuns vemos que $mdc(a, b) = 20$.

Exercício 9. Se $a = 2^4 \times 3^2 \times 11$ e $b = 2 \times 3^5 \times 7^3$, calcule $mdc(a, b)$.

Solução: Se o objetivo é apenas determinar o *mdc*, podemos simplificar o que foi feito no exercício anterior. Se d é um divisor de a, então os únicos fatores primos de d são 2, 3 e 11. E se d é um divisor de b, então os únicos fatores primos de d são 2, 3 e 7. Assim, fazendo a interseção, se d é um divisor comum de a e de b, concluímos que os únicos fatores primos de d são 2 e 3 e, portanto, d tem a forma $d = 2^x \times 3^y$. Como queremos o maior divisor comum, precisamos considerar os maiores valores permitidos para x e y. O número x não pode ser maior que 4 e 1, que são os expoentes do fator primo 2 nas fatorações de a e de b. Logo o maior valor possível para x é 1. De modo análogo, y não pode ser maior que 2 e 5, expoentes do fator primo 3 nas fatorações de a e de b. Portanto o maior valor possível para y é 2. Tomando então $x = 1$ e $y = 2$, concluímos que $mdc(a, b) = 2^1 \times 3^2$. Ou seja, $mdc(a, b)$ é a parte comum (interseção) das fatorações de a e b.

Exercício 10. Em cada caso, calcule mdc(a,b).

(a) $a = 3 \cdot 5^6 \cdot 11^2$, $b = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^4$.

(b) $a = 2^3 \cdot 7^2 \cdot 13^5$, $b = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 11^6 \cdot 13$.

(c) $a = 3 \cdot 5^2 \cdot 7^3$, $b = 2^5 \cdot 7 \cdot 13$.

(d) $a = 2^3 \cdot 7^2 \cdot 11^5$, $b = 3^6 \cdot 5^2 \cdot 13^4$.

Solução: Procedendo como no exercício anterior, comparando as fatorações de a e de b, considerando os menores expoentes, pode-se concluir que:

(a) $mdc = 3 \cdot 5^2$.

(b) $mdc = 2^3 \cdot 13$.

(c) $mdc = 7$.

(d) $mdc = 1$.

Aproveitando o item (d) do exercício anterior, vamos ver o conceito de números relativamente primos.

Definição: Dois números naturais a e b são relativamente primos, ou primos entre si, se não existir um número primo que divide simultaneamente a e b. De modo equivalente, isto significa que $mdc(a, b) = 1$.

Por exemplo, $28 = 2^2 \times 7$ e $45 = 3^2 \times 5$ são relativamente primos, ou primos entre si, pois não existe um fator primo em comum entre a e b. De modo equivalente isto também poderia ser concluído do fato de $mdc(28, 45) = 1$.

Agora seguem alguns exercícios que irão apresentar uma estratégia para o cálculo do *mmc* de dois números fatorados.

Exercício 11. Se $a = 2^3 \times 5 \times 7^2$ identifique quais dos seguintes numeros são múltiplos de a.

(a) $2^4 \cdot 5^2 \cdot 7^3$

(b) $2 \cdot 5 \cdot 7^4 \cdot 13^2$

(c) $2^5 \cdot 5^2 \cdot 7$

(d) $2^3 \cdot 5 \cdot 7^6 \cdot 13 \cdot 19^2$

(e) $2^7 \cdot 5^3 \cdot 7^4 \cdot 60$

Solução: Se m é um múltiplo de a, então existe um número n tal que $m = na = n \times 2^3 \times 5 \times 7^2$. Isto implica que na fatoração de m devem aparecer pelo menos os elementos 2^3, 5 e 7^2 e, portanto, que m deve ter a forma $m = 2^x \times 5^y \times 7^z \times n$, em que $x \geq 3$, $y \geq 1$, $z \geq 2$ e n é qualquer número natural. Daí segue que, entre os números dados, somente em (a), (d) e (e) encontramos múltiplos de a.

Exercício 12. Se $a = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7$ e $b = 2 \times 3^4 \times 5$, calcule $mmc(a, b)$.

Solução: Como no exercício anterior, se m é um múltiplo de a, então na fatoração de m devem aparecer pelo menos os elementos 2^3, 3^2, 5 e 7. Se m é um múltiplo de b, então na fatoração de m devem aparecer pelo menos 2, 3^4 e 5. Daí, para que isso ocorra simultaneamente no caso em que m é um múltiplo comum de a e de b, na fatoração de m devem aparecer pelo menos 2^3, 3^4, 5 e 7. Portanto, os múltiplos comuns de a e de b têm a forma $m = 2^3 \times 3^4 \times 5 \times 7$, em que n é um número natural qualquer. Como queremos o menor múltiplo comum, pegamos $n = 1$ e obtemos $mmc(a, b) = 2^3 \times 3^4 \times 5 \times 7$.

Observamos que se temos dois números fatorados como produtos de primos, o que acabamos de ver é um excelente método para o cálculo do *mmc* e do *mdc*. Entretanto, se os números não estão fatorados, este método pode ser muito trabalhoso, pois na prática é muito difícil fatorar um número muito grande. Para fazer isto, para fatorar um número, devemos achar os seus divisores primos, que pode ser uma tarefa inviável se o número for grande.

Cálculo do *mdc* e do *mmc*: fatorando simultaneamente

Exercício 13. Calcule $mdc(100, 140)$.

Solução: Como o *mdc* entre 100 e 140 deve, naturalmente, ser um divisor de 100 e 140, podemos ir dividindo estes dois números por todos os números primos que os dividem simultaneamente. Como na fatoração de um número, esses cálculos podem ser organizados da seguinte maneira, em que do lado direito da barra vertical são colocados os números primos que dividem 100 e 140 ao mesmo tempo, e do lado esquerdo da barra s˜ao colocados os resultados dessas divisões sucessivas.

$$
\begin{array}{rcr|l}
100 & , & 140 & 2 \\
50 & , & 70 & 2 \\
25 & , & 35 & 5 \\
5 & , & 7 &
\end{array}
$$

Como 5 e 7 são primos entre si (eles não possuem divisor primo em comum), paramos o processo e vemos que $mdc(100, 140) = 22 \times 5 = 20$, pois do modo como esse número foi construído, ele é um divisor comum de 100 e 140 e ele é o maior possível, pois testamos todas as possibilidades de divisores comuns.

Exercício 14. Calcule $mdc(1500, 1800)$.

Solução: Aplicando o processo prático para o cálculo do *mdc* descrito no exercício anterior, devemos dividir 1500 e 1800 por todos os divisores primos comuns. Paramos até obter dois números relativamente primos, isto é, dois números sem fator primo algum em comum.

$$
\begin{array}{rcr|l}
1500 & , & 1800 & 2 \\
750 & , & 900 & 2 \\
375 & , & 450 & 3 \\
125 & , & 150 & 5 \\
25 & , & 30 & 5 \\
5 & , & 6 &
\end{array}
$$

Daí $mdc(1500, 1800) = 2^2 \times 3 \times 5^2 = 300$.

Vejamos agora um processo similar para o cálculo do *mmc*.

Exercício 15. Calcule $mmc(12, 90)$.

Solução: Por ser um múltiplo de 12 e de 90, o $mmc(12, 90)$ deve ter todos os fatores primos que aparecem nas fatorações de 12 e de 90. Deste modo, a fatoração do $mmc(12, 90)$ deve conter as fatorações em números primos dos números 12 e 90. Então para calcular $mmc(12, 90)$ fatoramos ao mesmo tempo estes dois números, organizando o cálculo como está indicado a seguir, em que do lado direito da barra vertical colocamos os primos que dividem ou 12 ou 90. Para achar o menor múltiplo comum, sempre que for possível, dividir os dois números do lado esquerdo da barra vertical pelo respectivo número que aparece do lado direito.

$$\begin{array}{rr|l}
12\,, & 90 & 2 \\
6\,, & 45 & 2 \\
3\,, & 45 & 3 \\
1\,, & 15 & 3 \\
1\,, & 5 & 5 \\
1\,, & 1 &
\end{array}$$

Multiplicando todos os números primos do lado direito da barra vertical obtemos o *mmc* desejado. Portanto, $mmc(12, 90) = 2^2 \times 3^2 \times 5 = 180$.

Exercício 16. Calcule $mmc(75, 84)$.

Solução:

$$\begin{array}{rr|l}
75\,, & 84 & 2 \\
75\,, & 42 & 2 \\
75\,, & 21 & 3 \\
25\,, & 7 & 5 \\
5\,, & 7 & 5 \\
1\,, & 7 & 7 \\
1\,, & 1 &
\end{array}$$

Daí segue que $mmc(75, 84) = 2^2 \times 3 \times 5^2 \times 7 = 2100$. Vale a pena observar que os processos explicados nos exercícios anteriores para o cálculo do *mdc* e do *mmc* podem ser aplicados simultaneamente. Para isto, basta identificar os fatores primos que dividiram os dois números ao mesmo tempo. Considerando somente estes números, obtemos o *mdc*. E considerando todos, obtemos o *mmc*.

Exercício 17. Calcule o *mdc* e o *mmc* de 980 e 1050.

Solução: Podemos utilizar o processo prático para o cálculo do *mmc*, mas em cada linha marcamos com um quadradinho o fator primo que divide os dois números simultaneamente.

$$\begin{array}{rr|c}
980\,, & 1050 & \boxed{2} \\
490\,, & 525 & 2 \\
245\,, & 525 & 3 \\
245\,, & 175 & \boxed{5} \\
49\,, & 35 & 5 \\
49\,, & 7 & \boxed{7} \\
7\,, & 1 & 7 \\
1\,, & 1 &
\end{array}$$

Considerando somente os fatores comuns obtemos $mdc(980, 1050) = 2 \times 5 \times$

$7 = 70$ e considerando todos os fatores obtemos $mmc(980, 1050) = 2^2 \times 3 \times 5^2 \times 7^2 = 14700$. Também é importante observar que para o cálculo do mdc ou do mmc não existe a obrigatoriedade de dividir apenas por números primos e nem a necessidade de considerar os números primos em ordem crescente. Considerando números compostos, ou números primos maiores, o processo pode ser facilitado ou acelerado. Veja o seguinte exercício.

Exercício 18. Calcule o $mdc(6930, 9750)$.

Solução:

$$\begin{array}{rr|c}
6930\ , & 9750 & \boxed{10} \\
693\ , & 975 & 5 \\
693\ , & 195 & 5 \\
693\ , & 39 & \boxed{3} \\
231\ , & 13 &
\end{array}$$

Como 13 e 231 não primos entre si, não é necessário continuar, pois não obteremos mais fatores em comum. Daí multiplicando os números marcados obtemos $mdc(6930, 9750) = 10 \times 3 = 30$.

Exercício 19. Encontre o menor número natural n tal que n! é divisível por 990.

Solução: Como $990 = 2 \times 3^2 \times 5 \times 11$, $n!$ tem que conter um fator 11. Mas 11 é primo, logo ele mesmo tem que estar contido no produto e $n = 11$ é o menor valor possível.

Exercício 20. Considere todos os inteiros com nove algarismos distintos (em base decimal), todos diferentes de 0. Encontre o MDC de todos eles.

Solução: Entre esses números encontramos os números 987654312, que diferem por 9, de modo que o MDC divide 9. Por outro lado, 9 certamente divide todos os números pelo critério bem conhecido de divisibilidade por 9. Logo a resposta é 9.

Alguns Teoremas e Definições

Definição. Diremos que um número inteiro d é um divisor de outro inteiro a, se a é múltiplo de d; ou seja, se $a = d \times c$, para algum inteiro c.

Quando a é múltiplo de d dizemos também que a é divisível por d ou que d divide a.

Representaremos o fato de um número d ser divisor de um número a, ou d dividir a, pelo símbolo $d \mid a$. Caso d não divida a, escrevemos $d \nmid a$.

Assim, por exemplo, temos que

$$1 \mid 6, 2 \mid 6, 3 \mid 6, 6 \mid 6, -6 \mid 6, -3 \mid 6, -2 \mid 6, -1 \mid 6$$

Além disso, se d não pertence $\{-6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6\}$, então $d \nmid 6$.

Temos também que $1 \mid a$ e $d \mid 0$, para todo d, inclusive quando $d = 0$, pois 0 é múltiplo de qualquer número.

Note também que se $d \mid a$, então $-d \mid a$, $d \mid -a$ e $-d \mid -a$

Note que se a e d são números naturais, com a $6 = 0$, e se $d \mid a$, então $d \leq a$. De fato, sendo a um múltiplo natural não nulo do número natural d, sabemos que $a \geq d$.

Definição. Dados dois números inteiros a e b não simultaneamente nulos, o maior divisor comum de a e b será chamado de máximo divisor comum de a e b e denotado por $mdc(a, b)$.

Note que

$$mdc(a, b) = mdc(b, a).$$

Teorema 3.1. Todo múltiplo comum de dois inteiros a e b é múltiplo de $mmc(a, b)$.

Demonstração. Seja $m = mmc(a, b)$. Suponha que m' seja um múltiplo comum de a e b. Se $m' = 0$, nada temos a provar, pois 0 é múltiplo de qualquer inteiro, inclusive de m. Suponha que $m' \neq 0$, logo $a \neq 0$ e $b \neq 0$, o que mostra que $m = mmc(a, b) > 0$. Pelo algoritmo da divisão euclidiana, podemos escrever

$$m' = mq + r, com 0 \leq r < m.$$

Logo, $r = m' - mq$ e, sendo m' e mq múltiplos comuns de a e b, segue que r é múltiplo de comum de a e b. Mas então $r = 0$, pois caso contrário teríamos um múltiplo comum r de a e b, tal que $0 < r < m$, contradizendo a definição de mmc.

O Teorema acima nos fornece a seguinte relação:

$$aZ \cap bZ = mmc(a, b)Z.$$