Aula 2 – 5º Encontro

Permutações com Repetições Circulares

05/11/2016

1. (Exemplo 3, pág. 32, "Métodos de Contagem e Probabilidade") Quantos anagramas podemos formar com a palavra:

a) PIC

b) AMOR

c) ANA

d) AMAR

e) CABRA

f) BANANA

g) MATEMATICA

1)

a) PIC

___ ___ ___

Observe que temos 3 maneiras de colocar a primeira letra, 2 maneiras de colocar a segunda letra e 1 maneira de colocar a terceira letra.

Assim, temos

$$\mathbf{3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6} \ \textit{possibilidades}$$

b) AMOR

$$\_\_\_ \quad \_\_\_ \quad \_\_\_ \quad \_\_\_$$

Observe que temos 4 maneiras de colocar a primeira letra, 3 maneiras de colocar a segunda letra, 2 maneiras de colocar a terceira letra e 1 maneira de colocar a quarta letra.

Assim, temos

$$\mathbf{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = 24}\ possibilidades$$

c) ANA

___ ___ ___

Se fizermos como o item anterior ficaria desta forma:

ANA **ANA**

NAA **NAA**

AAN **AAN**

Porém temos 2 letras A. Isto é, podemos colocá-la na palavra de C_3^2 modos.

Assim, temos que o total de anagramas possíveis é

$$C_3^2 \cdot 1 = \frac{3!}{2! \cdot (3-2)!} = \frac{6}{2} = 3$$

Ou simplesmente podemos dividir pelas letras repetidas, que ficaria:

$$P_3^2 = \frac{3!}{2!} = \frac{6}{2} = 3$$

d) AMAR

$$\_\_\_ \quad \_\_\_ \quad \_\_\_ \quad \_\_\_$$

Observe que novamente temos repetição. Temos 2 letras A, isto é, C_4^2, nos restando $2 \cdot 1$ possibilidades para as demais letras (M e R)

Assim, temos

$$C_4^2 \cdot 2 \cdot 1 = \frac{4!}{\cancel{2}! \cdot (4-2)!} \cdot \cancel{2} = \frac{4!}{2} = \frac{24}{2} = 12$$

Ou simplesmente, dividimos de todas as possibilidade as letras que se repetem:

$$P_4^2 = \frac{4!}{2!} = \frac{24}{2} = 12$$

e) CABRA

$$\underline{\qquad}\quad\underline{\qquad}\quad\underline{\qquad}\quad\underline{\qquad}\quad\underline{\qquad}$$

Observe que temos 2 letras A, isto é, C_5^2, nos restando $3 \cdot 2 \cdot 1$ possibilidades para as demais letras (C, B e R)

Assim, temos

$$C_5^2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \frac{5!}{2! \cdot (5-2)!} \cdot 6 = \frac{5!}{2 \cdot \cancel{3!}} \cdot \cancel{6} = \frac{120}{2} = 60$$

Ou simplesmente, dividimos de todas as possibilidade as letras que se repetem:

$$P_5^2 = \frac{5!}{2!} = \frac{120}{2} = 60$$

f) BANANA

$$\_\_\_ \quad \_\_\_ \quad \_\_\_ \quad \_\_\_ \quad \_\_\_ \quad \_\_\_$$

Observe que temos 3 letras A, isto é, C_6^3, e 2 letras N, isto é, C_3^2 nos restando 1 possibilidade para a letra B.

Assim, temos

$$C_6^3 \cdot C_3^2 \cdot 1 = \frac{6!}{3! \cdot (6-3)!} \cdot \frac{3!}{2! \cdot (3-2)!} = \frac{6!}{6 \cdot \cancel{6}} \cdot \frac{\cancel{3!}}{2} = \frac{720}{12} = 60$$

Ou simplesmente, dividimos de todas as possibilidade as letras que se repetem:

$$P_6^{3,2} = \frac{6!}{3! \cdot 2!} = \frac{720}{12} = 60$$

g) Observe que a palavra MATEMATICA possui letras repetidas: há 3 A, 2 M e 2 T, além de E, I e C, que aparecem uma vez cada.

Temos dois modos de resolver este exercício:

1ºmodo: Primeiramente observe as letras que se repetem:

- Para colocar os A, temos que escolher 3 dentre os 10 lugares possíveis, o que pode ser feito com C_{10}^{3}.
- Para colocar os M, restam agora7 lugares, dos quais temos que escolher 2, o que pode ser feito com C_{7}^{2} maneiras.
- Agora só restam 5 lugares, dos quais devemos escolher 2 para colocar os T, temos C_{5}^{2} possibilidades.

Agora só restam 3 lugares, nos quais devem ser colocadas as três letras restantes, o que pode ser feito de $3 \times 2 \times 1 = 3!$ Modos.

Logo o número total de anagramas é

$$C_{10}^{3} \cdot C_{7}^{2} \cdot C_{5}^{2} \cdot 3! = 151\ 200$$

2ºmodo: Partindo do número de permutações de 10 letras distintas (igual a 10!).

Porém neste caso considera as 3 letras A distintas, assim como as 2 letras M e as 2 letras T.

Para corrigir a contagem, basta contar quantas vezes cada anagrama foi contado.

Por exemplo:

A A A M M T T E I C
A A A M M T T E I C
A A A M M T T E I C
A A A M M T T E I C
A A A M M T T E I C
A A A M M T T E I C

Observe que o mesmo anagrama foi contado 6 vezes por causa da permutação dos A, isto é 3 $A = 3! = 6$. Analogamente teremos 2 $M = 2!$ e 2 $T = 2!$.

Portanto o número de anagramas é $P_{10}^{3,2,2} = \frac{10!}{3!\cdot 2!\cdot 2!} = 151\,200$

2. Quantas são as cartelas de bingo com os 5 números diferentes que podemos ter escolher:

a) entre 7 números?

b) entre 8 números? (A disposição dos números na cartela não importam).

2		**5**
	7	
4		**3**

2)

a) Observe que temos que escolher 5 números entre 7, sem que eles se repitam.

Assim, temos

$$C_7^5 = \frac{7!}{5! \cdot (7-5)!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!} \cdot 2!} = \frac{42}{2} = 21$$

b) Observe que agora temos que escolher 5 números entre 8, sem que eles se repitam.

Assim, temos

$$C_8^5 = \frac{8!}{5! \cdot (8-5)!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!} \cdot \cancel{3!}} = 56$$

3. (Exemplo 4, pág. 34, "Métodos de Contagem e Probabilidade") De quantos modos 6 pessoas (João, Maria, Pedro, Janete, Paulo e Alice) podem ser divididas em 3 duplas?

3) Uma maneira de dividir estas 6 pessoas em duplas é colocar as pessoas em fila e formar uma permutação de $AABBCC$.

Isto pode ser feito de $\frac{6!}{2!\cdot 2!\cdot 2!} = 90\ modos$. Mas note que ao colocar João e Maria na dupla A e Pedro e Janete na dupla B é equivalente colocar João e Maria na dupla B e Pedro e Janete na dupla A.

Portanto, uma mesma distribuição esta sendo contada tantas vezes quanto o número de modos de ordenar A, B e C, ou seja $3! = 6\ vezes$.

Logo o número de possíveis distribuições em duplas é $\frac{90}{6} = 15$ modos.

Ou,

$$\frac{6!}{3!\,(2!\cdot 2!\cdot 2!)} = 15\ modos$$

4. (Exemplo 5, pág. 34, "Métodos de Contagem e Probabilidade") Uma professora tem 3 bolas de gude para distribuir para 5 meninos (digamos Alfredo, Bernardo, Carlos, Diogo e Eduardo). De quantos modos ela pode fazer essa distribuição?

a) Supondo que ela dê as bolas para 3 alunos distintos?

b) Supondo que os contempladores possam ganhar mais de uma bola? (Por exemplo, Carlos pode receber todas as bolas)

4)

a) Supondo que ela dê as bolas para 3 alunos distintos?

Neste caso ela deve escolher 3 dentre os 5 meninos para receber as bolas.

O que pode ser feito de

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!\,(5-3)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3}!}{\cancel{3}! \cdot 2!} = \frac{20}{2} = 10\ modos$$

b) Supondo que os contemplados possam ganhar mais de uma bola? (Por exemplo, Carlos pode receber todas as bolas)

Podemos resolver o problema separando a contagem em casos:

- 1ª possibilidade - 3 premiados, cada um ganhando uma bola, como já vimos no item anterior pode ser feito de $C_5^3 = 10\ modos$;
- 2ª possibilidade – 2 premiados, um ganhando uma bola e outro duas.

O primeiro pode ser escolhido de 5 modos e o segundo de 4, isto é, $5 \times 4 = 20\ modos$.

- 3ª possibilidade – um premiado, ganhando as 3 bolas, que pode ser escolhido de 5 modos.

Portanto o número total de possibilidades é

$$10 + 20 + 5 = 35$$

Outro modo de resolver este exercício é observar que o número de possibilidades é o número de listas $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ representando o número de objetos dados a Alfredo, Bernardo, Carlos, Diogo e Eduardo, respectivamente, que satisfazem a equação:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 3$$

0 | 0 | | | 0

| 0 | 00 | |

000| | | |

Observe que temos 7 símbolos que podem ser permutados entre si, isto é 7!, mas observe que temos 3 **0** e 4 **|** . Portanto devemos dividir por 3! E 4!

Assim temos

$$\frac{7!}{3! \cdot 4!} = \frac{7 \cdot \cancel{6} \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{3!} \cdot \cancel{4!}} = 7 \cdot 5 = 35$$

Que é conhecido como ***Combinação Completa*** ou ainda ***combinação com Repetição***,

isto é,

$$CR_n^p = C_{n+p-1}^p$$

Que seria

$$CR_5^3 = C_{5+3-1}^3 = C_7^3 = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = 35$$

Combinação Completa ou com Repetição

Para contar o número de maneiras de distribuir p objetos para n pessoas (ou seja, de calcular o número de soluções inteiras e não negativas de $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = p$, ou ainda, de calcular o número CR_n^p de combinações completas de n elementos tomados p a p).

Temos p objetos, que devem ser separados por $n - 1$ tracinhos. Ou seja, precisamos escolher p das $n + p - 1$ posições para os objetos.

A resposta portanto é

$$CR_n^p = C_{n+p-1}^p$$

5. (Ex. 4, Métodos Sofisticados de Contagem – Caderno de Exercícios "Combinação Completa")

Podendo escolher entre 5 tipos de doces e 4 marcas de refrigerante, de quantos modos é possível fazer um pedido com dois doces e três garrafas de refrigerante?

5) Sejam $d_i, i \in \{1,2,3,4,5\}$, a quantidade de doces escolhidos do tipo i e $r_h, h \in \{1,2,3,4\}$, as quantidades de garrafas escolhidas do tipo h. Vamos calcular a quantidade das soluções naturais de duas equações, a saber:

$$d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 = 2 \quad \text{e} \quad r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 3$$

| 0 | | 0 | **00| | | 0**

$$\underbrace{|\quad|\quad|\quad|}_{C_6^2 = \frac{6!}{2!\cdot 4!} = \frac{6\cdot 5\cdot \cancel{4!}}{2\cdot \cancel{4!}} = 15} \qquad \underbrace{|\quad|\quad|}_{C_6^3 = \frac{6!}{3!\cdot 3!} = \frac{\cancel{6}\cdot 5\cdot 4\cdot \cancel{3!}}{\cancel{3}!\cdot \cancel{3!}} = 20}$$

Observe:

- para os doces podemos escolher 2 dentre 5 doces, isto é,

$$CR_5^2 = C_{5+2-1}^2 = C_6^2$$

- Para as garrafas de refrigerante podemos escolher 3 dentre 4, isto é,

$$CR_4^3 = C_{4+3-1}^3 = C_6^3$$

Por fim, o número de total de pedidos distintos que podem ser feitos é

$$15 \times 20 = 300$$

6. (Ex. 3, Métodos Sofisticados de Contagem – Caderno de Exercícios "Combinação Completa") Um dominó comum é constituído por dois quadrados que compartilham um lado em comum. Em cada quadrado está escrito um número do conjunto {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}. Sabendo que os números escritos nos dois quadrados não precisam ser distintos, quantas peças diferentes de dominó existem?

6) Seja f_i , $i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, o número de quadrados de um dominó com número i.

Cada dominó está associado então a uma solução da equação:

$$f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 = 2$$

Portanto, existem

$$CR_7^2 = C_{7+2-1}^6 = C_8^6 = \frac{8!}{6!(8-6)!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{6! \cdot 2!} = \frac{56}{2} = 28 \textit{ dominós}$$

7. (Ex. 5, Métodos Sofisticados de Contagem – Caderno de Exercícios “Combinação Completa”)

Quantos são os anagramas da palavra PARAMETRIZADA que não possuem duas letras “A” juntas?

7) Primeiramente vamos posicionar as letras diferentes de A:

P R M E T R I Z D

Observe que podemos colocar as letras 4 letras A em qualquer um desses 10 espaços, e como as 4 letras são iguais, podemos posicioná-las de:

$$C_{10}^{4} = \frac{10!}{4!\cdot(10-4)!} = \frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6!}{4!\cdot6!} = \frac{5040}{24} = 210\ modos$$

Agora observe que podemos permutar as 9 letras que fixamos de 9! modos, porém a letra R se repete, isto é

$$P_9^2 = \frac{9!}{2!} = \frac{362\ 880}{2} = 181\ 440$$

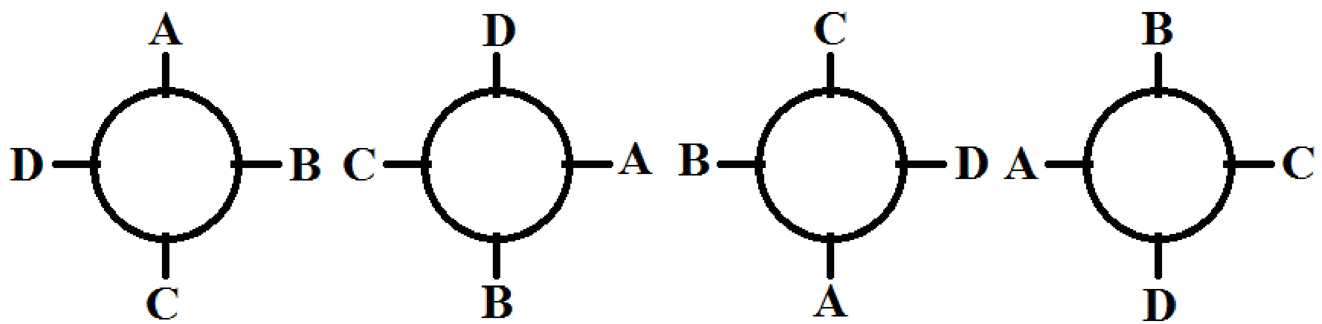
Por fim, teremos ao todo

$$210 \times 181\ 440 = 38\ 102\ 400\ anagramas.$$

8. (Exemplo 1, pág. 30, “Métodos de Contagem e Probabilidade”) De quantos modos 4 crianças podem formar uma roda?

8) A primeira vista , pode parecer que para formar uma roda com 4 crianças, basta escolher uma ordem para, o que pode ser feito de $4! = 24$ modos.

Entretanto as rodas ABCD, BCDA, CDAB e DABC mostradas na figura abaixo são iguais, estão apenas rotacionadas.



Portanto devemos dividir por 4, isto é,

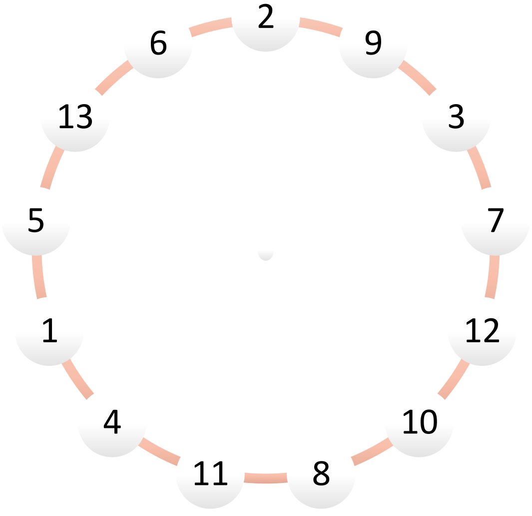
$$PC_4 = \frac{4!}{4} = \frac{4 \cdot 3!}{4} = 3! = 6$$

Permutação Circular

O número de permutações circulares de n objetos distintos é o número de modos de colocar esses n objetos em círculo, de forma que disposições que possam coincidir por rotação sejam consideradas iguais

$$\boldsymbol{PC_n = (n-1)!}$$

9. (Problema 24, Fomin, pág. 16 e 17) Um “colar” consiste em um fio circular com diversas contas presas nele. É permitido girar o colar, mas não virá-lo de cabeça para baixo. Quantos colares diferentes podem ser feitos com 13 contas diferentes?



9) Vamos supor que não podemos girar o colar.

Neste caso existem 13! colares diferentes. Entretanto, qualquer arranjos de contas tem que ser considerado idêntico aos 12 obtidos por rotação.

Assim temos,

$$PC_{13} = \frac{13!}{13} = \frac{13 \cdot 12!}{13} = 12! = 479\,001\,600$$

10. (Ex. 2, Métodos Sofisticados de Contagem – Caderno de Exercícios "Permutação Circular") Um grupo de 6 pessoas, incluindo Nilton e Lucimar, decide jogar cartas com rodadas circulares. Após a vez de um jogador, o próximo a jogar é aquele que está à sua direita.

a) Por questões estratégicas, Nilton decide se posicionar sempre imediatamente à direita de Lucimar. De quantas formas esses 6 jogadores podem sentar ao redor da mesa?

b) Suponha que agora Nilton deseja ficar em qualquer um dos dois lado de Lucimar. A resposta anterior muda?

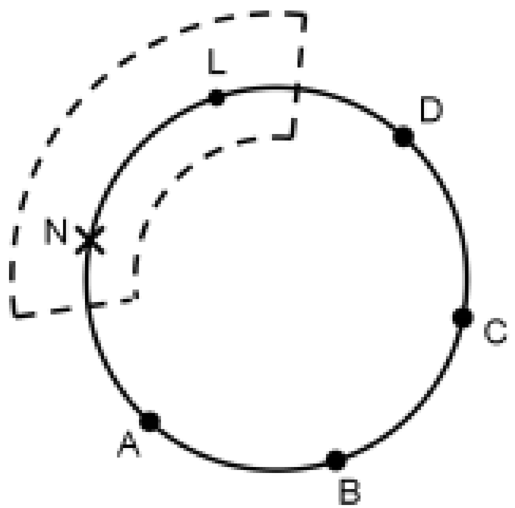
10)

a) O grupo inicial de 6 pessoas pode ser representado pelas letras:

A, B, C, D, L(de Lucimar) e **N** (de Nilton).

Por conta da preferência de Nilton, podemos pensar em **NL** como se fosse uma única letra (bloco) e em cada distribuição como a permutação circular dos símbolos: **A, B, C, D** e **NL**.

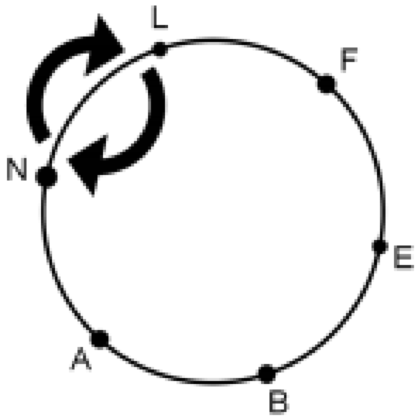
Portanto, a resposta para este item é



$$\boldsymbol{P_5 = 4! = 24}$$

b) Sim, a reposta muda.

Assim como no item anterior, podemos usar **NL** para representar apenas o local onde Lucimar e Nilton estarão posicionados, conforme a figura abaixo.



Usaremos a contagem obtida no item anterior, pois uma vez escolhido o lugar em que eles ficarão, teremos duas opções de posicioná-los:

Nilton à esquerda ou à direita de Lucimar.

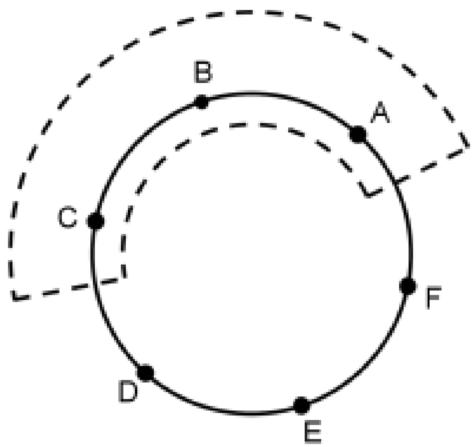
Portanto, pelo princípio multiplicativo, o total buscado é

$$2 \cdot PC_5 = 2 \cdot 4! = 2 \cdot 24 = 48 \textit{ disposições}$$

11. (Ex. 4, Métodos Sofisticados de Contagem – Caderno de Exercícios "Permutação Circular") Um grupo 6 crianças decide brincar de ciranda dando as mãos e fazendo uma roda. Dentre elas estão Aline, Bianca e Carla que são muito amigas e querem sempre ficar juntas. Nessa condição, qual o número de rodas distintas que podem ser formadas?

11) O grupo inicial de 6 pessoas pode ser representado pelas seguintes letras: **A** (de Aline), **B** (de Bianca), **C** (de Carla), **D**, **E** e **F**.

Como as três letras **A**, **B** e **C** devem aparecer juntas em alguma ordem, podemos considerar o Bloco **ABC**, isto é, teremos apenas as 4 "pessoas": **D, E, F** e **ABC**;



Portanto, inicialmente calculamos a permutação circular de 4 objetos, e em seguida, multiplicamos tal quantidade pelo número de maneiras de permutarmos as amigas que devem ficar juntas, isto é, 3!

Portanto, serão formadas

$$\mathbf{3}! \cdot \boldsymbol{PC_4} = \mathbf{3}! \cdot \mathbf{3}! = \mathbf{6} \cdot \mathbf{6} = \mathbf{36}\ \textit{rodas.}$$

12. (Ex. 6, Métodos Sofisticados de Contagem – Caderno de Exercícios “Permutação Circular”) De quantos modos 7 crianças, entre elas João e Maria, podem brincar de roda, ficando João sempre ao lado de Maria?

12) Analogamente ao item anterior.

João e Maria devem ficar juntos, **JM** deve ser um bloco e assim podemos permutar inicialmente 6 crianças. Dentro do bloco, podemos permutar **J** e **M** de duas formas. Portanto, o total de distribuições é

$$\mathbf{2 \cdot \boldsymbol{PC_6} = 2 \cdot 5! = 2 \cdot 120 = 240}$$