RESPOSTAS:

AULA 11: **ARITMÉTICA** – CONGRUÊNCIAS, CRITÉRIOS DE DIVISIBILIDADE E RESTOS, CONGRUÊNCIAS E SOMAS, CONGRUÊNCIAS E PRODUTOS.

I. Um inteiro é dito um *quadrado perfeito* quando ele é o quadrado de um inteiro. Usando congruências, encontre os possíveis algarismos das unidades de um quadrado perfeito.

Solução: Seja $n = m^2$ um quadrado perfeito, com m inteiro. Tem-se $m \equiv 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ ou $9 \pmod{10}$. Assim, $n = m^2 \equiv 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64$ ou $81 \pmod{10}$. Mas, $16 \equiv 6 \pmod{10}$, $25 \equiv 5 \pmod{10}$, $36 \equiv 6 \pmod{10}$, $49 \equiv 9 \pmod{10}$, $64 \equiv 4 \pmod{10}$ e $81 \equiv 1 \pmod{10}$. Assim, $n = m^2 \equiv 0, 1, 4, 5, 6$ ou $9 \pmod{10}$. Assim, os possíveis algarismos das unidades de um quadrado perfeito são $0, 1, 4, 5, 6$ ou 9.

II. Usando congruências, prove que $30^{99} + 61^{100}$ é divisível por 31.

Solução: Como $30^{99} + 61^{100} \equiv (-1)^{99} + (-1)^{100} = -1 + 1 = 0 \pmod{31}$, então $30^{99} + 61^{100}$ é divisível por 31.

III. Usando congruências, encontre o resto da divisão do número $10^{10} + 10^{100} + 10^{1000} + \cdots + 10^{10.000.000.000}$ por 7.

Solução: Tem-se $10^{10} \equiv 3^{10} = (3^3)^3 \cdot 3 = 27^3 \cdot 3 \equiv (-1)^3 \cdot 3 = -3 \pmod 7$, $10^{100} = (10^{10})^{10} \equiv (-3)^{10} = 3^{10} \equiv -3 \pmod 7$, $10^{1000} = (10^{100})^{10} \equiv (-3)^{10} = 3^{10} \equiv -3 \pmod 7$; em geral, $10^{10^n} \equiv -3 \pmod 7$, para todo n inteiro positivo. Assim, $10^{10} + 10^{100} + 10^{1000} + \cdots + 10^{10.000.000.000} \equiv (-3) + (-3) + \cdots + (-3) = 10 \cdot (-3) = -30 \equiv 5 \pmod 7$ e, logo, o resto da divisão de $10^{10} + 10^{100} + 10^{1000} + \cdots + 10^{10.000.000.000}$ por 7 é igual a 5.

(*Maneira alternativa de mostrar que* $10^{10^n} \equiv -3 \pmod 7$, *para todo* n *inteiro positivo*: Seja n um inteiro positivo. Como $10^n \equiv 0^n = 0 \equiv 4 \pmod 2$ e $10^n \equiv 1^n = 1 \equiv 4 \pmod 3$, então $10^n - 4$ é múltiplo de 2 e de 3 e, logo, $10^n - 4$ é múltiplo de $\text{mmc}(2,3) = 6$, ou seja, $10^n \equiv 4 \pmod 6$, isto é, $10^n = 6q + 4$, para algum inteiro q. Assim, $10^{10^n} = 10^{6q+4} = (10^6)^q \cdot 10^4 \equiv (3^6)^q \cdot 3^4 = ((3^3)^2)^q \cdot 81 = (27^2)^q \cdot 81 \equiv ((-1)^2)^q \cdot (-3) = 1 \cdot (-3) = -3 \pmod 7$).

AULA 12: **CONTAGEM** – PERMUTAÇÕES DE ELEMENTOS NEM TODOS DISTINTOS E PERMUTAÇÕES CIRCULARES.

I. De quantas maneiras 13 pessoas podem ser distribuídas em 3 quartos A, B e C de um hotel, de modo que 5 pessoas fiquem em A, 2 em B e 6 em C?
Solução:
Ordenemos as pessoas em fila, em ordem de idade por exemplo. Associemos a cada pessoa o quarto em que ela vai ficar. Desta forma, cada distribuição das 13 pessoas pelos 3 quartos, conforme o enunciado, corresponde de maneira única a exatamente uma sequência de 13 letras, sendo 5 letras iguais a A, 2 iguais a B e 6 iguais a C. O número de tais sequências é igual $P_{13}^{5,2,6} = \frac{13!}{5!2!6!} = 36036.$

II. Um cubo $5 \times 5 \times 5$ é formado por pequenos cubos unitários. Um gafanhoto está no centro O de um dos cubos de canto. Em qualquer instante, ele pode pular para o centro de qualquer cubo que tenha uma face em comum com o cubo onde ele está, desde que este pulo aumente a distância entre o ponto O e a posição atual do gafanhoto. De quantas maneiras o gafanhoto pode chegar ao cubo unitário no canto oposto?
Solução:
Para chegar ao cubo unitário no canto oposto o gafanhoto tem que dar 12 pulos, sendo 4 em cada uma das 3 direções. Denotando os pulos na primeira direção por A, os pulos na segunda direção por B e os pulos na terceira direção por C, então cada caminho percorrido pelo gafanhoto pode ser interpretado, de maneira única, como uma sequência de 12 letras A, B e C, sendo que cada uma das letras A, B e C deve aparecer exatamente 4 vezes na sequência. O número de tais sequências é igual a $P_{12}^{4,4,4} = \frac{12!}{4!4!4!} = 34650.$

III. Se 4 meninos e 4 meninas vão brincar de roda, de quantas maneiras poderão dar as mãos, de modo que pelo menos 2 meninas estejam juntas?
Solução:
O número de maneiras de dispor as 8 crianças na roda é igual a $PC_8 = 7! = 5040$. Vamos calcular o número de maneiras de dispor as crianças na roda de modo que não estejam 2 meninas juntas. Para tal, primeiro dispomos as 4 meninas na roda, o que pode ser feito de $PC_4 = 3! = 6$ maneiras. Uma vez dispostas as meninas na roda, deve-se dispor cada um dos 4 meninos entre cada par de meninas (de modo que nunca duas meninas fiquem juntas), o que pode feito de $4! = 24$ maneiras. Assim, o número de maneiras de dispor as crianças na roda de modo que não estejam 2 meninas juntas é igual a $6 \cdot 24 = 144$ maneiras. Assim, O número de maneiras de dispor as 8 crianças na roda, de modo que pelo menos 2 meninas estejam juntas, é igual a $5040 - 144 = 4896$.

AULA 13: **GEOMETRIA** – CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS DE ALGUNS LUGARES GEOMÉTRICOS.

I. Construa o trapézio isósceles que tem bases medindo 6,5 cm e 2,5 cm e diagonais medindo 5,5 cm.

Solução:

Em uma reta r, marque um segmento de reta AB medindo 6,5 cm e o segmento de reta BE medindo 2,5 cm, de modo que B esteja entre A e E. Trace as circunferências centradas em A e E ambas de raio medindo 5,5 cm, e seja C um dos pontos de interseção destas duas circunferências. Em particular, tem-se $AC = CE = 5{,}5 \text{ cm}$. Trace a reta s paralela à reta r passando por C (a construção da reta paralela a uma reta dada passando por um ponto dado é mostrada na página 5 da Apostila 8). Trace a reta t passando por B e que é paralela à reta que contém os pontos C e E, e seja D o ponto de interseção das retas s e t. Como as retas r e s são paralelas e a reta t é paralela à reta que contém os pontos C e E, então $BECD$ é um paralelogramo e, logo, $CD = BE = 2{,}5 \text{ cm}$ e $BD = CE = 5{,}5 \text{ cm}$. Como $AB = 6{,}5 \text{ cm}$, $CD = 2{,}5 \text{ cm}$ e $AC = BD = 5{,}5 \text{ cm}$, então $ABCD$ é o trapézio isósceles pedido.

II. Construir o triângulo ABC conhecendo o lado $BC = 7 \text{ cm}$ e as alturas $BD = 5{,}4 \text{ cm}$ e $CE = 6{,}7 \text{ cm}$.

Solução:

Dado o segmento de reta $BC = 7 \text{ cm}$, traçamos a circunferência centrada em B de raio BC e a circunferência centrada em C de raio BC. Traçamos a reta que passa pelos pontos de interseção dessas duas circunferências. Tal reta intersecta BC em seu ponto médio M. Traçamos a circunferência C_1 centrada em M de raio BM. Tal circunferência tem BC como um de seus diâmetros. Dado o segmento de reta $BD = 5{,}4 \text{ cm}$, traçamos a circunferência C_2 centrada em B de raio BD. Dado o segmento de reta $CE = 6{,}7 \text{ cm}$, traçamos a circunferência C_3 centrada em C de raio CE. A circunferência C_2 intersecta a circunferência C_1 no ponto D de modo que o ângulo $B\hat{D}C$ é reto, já que BC é diâmetro de C_1. A circunferência C_3 intersecta a circunferência C_1 no ponto E de modo que o ângulo $B\hat{E}C$ é reto, já que BC é diâmetro de C_1. Seja A o ponto de interseção das retas CD e BE. Como BD é perpendicular a AC e CE é perpendicular a AB, então o triângulo ABC tem BD e CE como alturas.

III. Construir o triângulo ABC de perímetro 11cm sabendo que os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ medem, respectivamente, 58° e 76°.

Solução:

Trace uma reta e sobre ela marque um segmento de reta PQ de medida 11cm. Construa a bissetriz do ângulo de 58°, obtendo assim um ângulo de 29°. Trace o ângulo $QPU = 29^\circ$. A construção do ângulo $QPU = 29^\circ$ a partir de um ângulo de 29° está descrita no Problema 4 da pág. 11 da Apostila 8. Construa a bissetriz do ângulo de 76°, obtendo assim um ângulo de 38°. Trace o ângulo $PQV = 38^\circ$, de modo que o ponto V esteja no mesmo semiplano do ponto U relativamente à reta PQ. Marque o ponto A de interseção da reta PU com a reta QV. Trace a mediatriz do segmento de reta AP (a construção da mediatriz de um segmento de reta está descrita na pág. 19 da Apostila 8) e marque o ponto B de interseção desta mediatriz com a reta PQ. O ponto B está no segmento PQ. Trace a mediatriz do segmento de reta AQ e marque o ponto C de interseção desta mediatriz com a reta PQ. O ponto C está no segmento BQ. Obtém-se assim um triângulo ABC. Como B pertence à mediatriz de AP, então $BP = AB$. Como $BP = AB$, então no triângulo ABP os ângulos internos nos vértices P e A são congruentes e, logo, o ângulo interno de ABP no vértice A mede 28°. Como o ângulo interno de ABC no vértice B é um ângulo externo de ABP, então, pelo Teorema do Ângulo Externo, ele mede $29^\circ + 29^\circ = 58^\circ$. Analogamente, conclui-se que $CQ = AC$ e que o ângulo interno de ABC no vértice C mede $38^\circ + 38^\circ = 76^\circ$. Como o ponto B está entre P e Q, e o ponto C está entre B e Q, então $PB + BC + CQ = PQ = 11\,\text{cm}$. Como $PB = AB$, $CQ = AC$ e $PB + BC + CQ = PQ = 11\,\text{cm}$, então $AB + BC + AC = 11\,\text{cm}$, ou seja, ABC tem perímetro 11cm. Assim, ABC é mesmo o triângulo procurado.

AULA 14: **ARITMÉTICA** – APLICAÇÕES DE CONGRUÊNCIAS, ARITMÉTICA MODULAR.

I. Mostre que a equação $x^3 + 21y^2 + 5 = 0$ não tem soluções inteiras para x e y.

Solução: Suponha, por contradição, que existam x_0 e y_0 inteiros tais que $x_0^3 + 21y_0^2 + 5 = 0$. Então, $x_0^3 + 21y_0^2 + 5 = 0 \equiv 0 \pmod 7$ e, logo, como $21 \equiv 0 \pmod 7$ e $5 \equiv -2 \pmod 7$, tem-se $x_0^3 \equiv 2 \pmod 7$. Por outro lado, x_0 é côngruo a 0, 1, 2, 3, 4, 5 ou 6, módulo 7, e, logo, $x_0^3 \equiv 0^3 = 0 \pmod 7$ ou $x_0^3 \equiv 1^3 = 1 \pmod 7$ ou $x_0^3 \equiv 2^3 = 8 \equiv 1 \pmod 7$ ou $x_0^3 \equiv 3^3 = 3^2 \cdot 3 = 9 \cdot 3 \equiv 2 \cdot 3 = 6 \pmod 7$ ou $x_0^3 \equiv 4^3 = 4^2 \cdot 4 = 16 \cdot 4 \equiv 2 \cdot 4 = 8 \equiv 1 \pmod 7$ ou $x_0^3 \equiv 5^3 = 5^2 \cdot 5 = 25 \cdot 5 \equiv 4 \cdot 5 = 20 \equiv 6 \pmod 7$ ou $x_0^3 \equiv 6^3 = 6^2 \cdot 6 = 36 \cdot 6 \equiv 1 \cdot 6 = 6 \pmod 7$, ou seja, x_0^3 é côngruo a 0, 1 ou 6, módulo 7, o que contradiz $x_0^3 \equiv 2 \pmod 7$.

II. a) Mostre que todo quadrado perfeito é côngruo a 0, 1 ou 4, módulo 8.

b) Mostre que não há nenhum quadrado perfeito na sequência: 2, 22, 222, 2222, 22222, ...

c) Mostre que não há nenhum quadrado perfeito na sequência: 3, 11, 19, ..., $3 + 8n$, ...

Solução:

a) Para resolver esse item, proceda de maneira análoga ao problema anterior quando foi mostrado que todo cubo perfeito é côngruo a 0, 1 ou 6, módulo 7.

b) Tem-se $2 \equiv 2 \pmod 8$, $22 \equiv 6 \pmod 8$, $222 = 200 + 22 \equiv 0 + 6 = 6 \pmod 8$, $2222 = 2 \cdot 1000 + 222 \equiv 2 \cdot 0 + 6 = 6 \pmod 8$, $22222 = 20 \cdot 1000 + 222 \equiv 20 \cdot 0 + 6 = 6 \pmod 8$,..., $222222 = 200 \cdot 1000 + 2222 \equiv 200 \cdot 0 + 6 = 6 \pmod 8$, e assim por diante. Assim, os números da sequência são côngruos a 2 ou 6, módulo 8, e, logo, pelo item a, não podem ser quadrados perfeitos.

c) Como $3 + 8n \equiv 3 \pmod 8$, para todo inteiro não negativo n, então os números da sequência são côngruos a 3, módulo 8, e, logo, pelo item a, não podem ser quadrados perfeitos.

III. Prove que, entre 52 inteiros quaisquer, existem dois cujos quadrados têm o mesmo resto na divisão por 100.

Solução: Todo número inteiro é côngruo, módulo 100, a exatamente um dos inteiros $0, 1, 2, \ldots, 99$. Assim, cada um dos 52 inteiros dados é côngruo, módulo 100, a exatamente um dos elementos de exatamente um dos 51 conjuntos: $\{0\}$, $\{50\}$, $\{1, 99\}$, $\{2, 98\}$, ..., $\{49, 51\}$. Pelo Princípio da Casa de Pombos (*se não conhecer esse Princípio, pesquise sobre ele; é bem simples!*), entre os 52 inteiros dados, existem dois deles, x e y ($x \neq y$), tais que:

- $x \equiv 0 \equiv y \pmod{100}$ ou
- $x \equiv 50 \equiv y \pmod{100}$ ou
- para algum i, com $i = 1, 2, \ldots, 49$, tem-se $x \equiv i \pmod{100}$ ou $x \equiv 100 - i \equiv -i \pmod{100}$, e $y \equiv i \pmod{100}$ ou $y \equiv 100 - i \equiv -i \pmod{100}$.

Em qualquer um dos casos acima, tem-se $x^2 \equiv y^2 \pmod{100}$ e, logo, x^2 e y^2 têm o mesmo resto na divisão por 100.

AULA 15: **CONTAGEM** – COMBINAÇÕES COMPLETAS.

I. Quantas são as soluções inteiras não negativas de $x + y + z + w = 6$.

Solução:

Este problema pode ser representado no esquema bola-traço. Devemos encontrar o número de formas de permutar 6 bolas e 3 traços. Isto pode ser feito de $CR_4^6 = \frac{9!}{6!\cdot 3!} = \frac{9\cdot 8\cdot 7}{6} = 84$.

II. Quantas são os anagramas da palavra "PIRACICABA" que não possuem duas letras "A" adjacentes?

Solução:

Primeiro colocamos as letras "A" de um único modo: " __ A __ A __ A __". Agora devemos decidir quantas letras colocaremos em cada um dos quatro espaços. Devemos escolher x_1, x_2, x_3, x_4 (x_i = nº de letras que colocaremos no i-ésimo espaço) inteiros não negativos tais que $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$, com $x_2 \geq 1$ e $x_3 \geq 1$ (para não ter duas letras "A" adjacentes). Fazendo $x_2 = y_2 + 1$ e $x_3 = y_3 + 1$ obtemos a equação $x_1 + y_2 + 1 + y_3 + 1 + x_4 = 7$, ou seja $x_1 + y_2 + y_3 + x_4 = 5$, onde x_1, y_2, y_3, x_4 são inteiros não negativos. Este problema pode ser representado no esquema bola-traço. Devemos encontrar o número de formas de permutar 5 bolas e 3 traços. Isto pode ser feito de $CR_4^5 = \frac{8!}{5!\cdot 3!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{6} = 56$. Cada uma dessas soluções corresponde a uma configuração de número de letras entre as letras "A". Agora devemos permutar as letras "P,I,R,C,I,C,B" nos espaços, o que pode ser feito de $\frac{7!}{2!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!} = 1260$. Portanto, o número de anagramas procurado é $56 \cdot 1260 = 70\,560$.

III. De quantos modos podem ser pintados 9 objetos iguais usando 3 cores diferentes?

Solução:

Chamemos as cores pelos números 1, 2, 3. Seja x_i o número de objetos pintados usando a cor i. Dessa forma devemos achar o número de soluções da equação $x_1 + x_2 + x_3 = 9$. Novamente podemos representar este problema no esquema bola-traço. Devemos encontrar o número de formas de permutar 9 bolas e 2 traços. Isto pode ser feito de $CR_3^9 = \frac{11!}{9!\cdot 2!} = \frac{11\cdot 10}{2} = 55$.

AULA 16: **GEOMETRIA** – CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS DE EXPRESSÕES ALGÉBRICAS.

I. Dado o segmento a e o segmento unitário $u = 1$, construa $x = \sqrt[4]{a}$.

Solução:

Se $y = \sqrt{a}$, então $x = \sqrt[4]{a} = \sqrt{\sqrt{a}} = \sqrt{y}$. Assim, x é a média geométrica de y e u, sendo que y é a média geométrica de a e u, onde u é um segmento unitário fixado. Assim, construímos sobre uma reta os segmentos $AH = u$ e $HB = a$, com H entre A e B. Traçando a mediatriz de AB encontramos o seu ponto médio O e traçamos uma semicircunferência de centro O e diâmetro AB. A perpendicular a AB passando por H determina o ponto C na semicircunferência. Como C é um ponto da semicircunferência e AB é diâmetro da mesma, então o triângulo ABC é retângulo com ângulo reto em C e, portanto, $CH^2 = AH \cdot HB = 1 \cdot a = a$ e, logo, $CH = \sqrt{a} = y$. Sobre a reta contendo C e H construímos o segmento $CD = u$, com C entre D e H. Traçando a mediatriz de DH encontramos o seu ponto médio O' e traçamos uma semicircunferência de centro O' e diâmetro DH. A perpendicular a DH passando por C determina o ponto E na semicircunferência. Como E é um ponto da semicircunferência e DH é diâmetro da mesma, então o triângulo EDH é retângulo com ângulo reto em E e, portanto, $EC^2 = CD \cdot CH = 1 \cdot y = y$ e, logo, $EC = \sqrt{y} = x$.

II. Considere um segmento de reta AB e um ponto C interior (mais próximo de B do que de A). Dizemos que AC é o *segmento áureo* de AB quando $CB/AC = AC/AB$.

a) Desenhe um segmento de reta AB qualquer e construa o seu segmento áureo.

b) Qual é o valor da razão AC/AB?

Solução:

a) Desenhamos um segmento de reta $AB = a$ qualquer. Se o segmento áureo de AB é $AC = x$, então $(a - x)/x = x/a$, isto é, $x^2 + ax - a^2 = 0$ e, portanto, $x = \left(-a + \sqrt{a^2 + 4a^2}\right)/2 = \sqrt{a^2 + (a/2)^2} - a/2$. Traçando a mediatriz de AB, obtemos o ponto médio M de AB. Traçamos a perpendicular a AB passando por B e, nessa perpendicular, marcamos um ponto C tal que $BC = BM = a/2$. Como o triângulo ABC é retângulo com ângulo reto em B, então $AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + (a/2)^2$ e, portanto, $AC = \sqrt{a^2 + (a/2)^2}$. Marcamos um ponto D em AC tal que $CD = BC = a/2$. Assim, $AD = AC - CD = \sqrt{a^2 + (a/2)^2} - a/2 = x$.

b) $AC/AB = x/a = \left(\left(-a + \sqrt{a^2 + 4a^2}\right)/2\right)/a = \left(\sqrt{5} - 1\right)/2$.

III. Dados os segmentos de reta a, b, c e d (à sua escolha) construa

$$x = \frac{a^2 + bc}{d}.$$

Solução:

Se y é tal que $y^2 = bc$, ou seja, y é a média geométrica dos segmentos b e c, e $r = \sqrt{a^2 + y^2}$, então $x = r^2/d$, isto é, $d/r = r/x$, ou seja, x é a terceira proporcional entre os segmentos d e r. Construímos sobre uma reta os segmentos $AH = b$ e $HB = c$, com H entre A e B. Traçando a mediatriz de AB encontramos seu ponto médio O e traçamos uma semicircunferência de centro O e diâmetro AB. A perpendicular a AB passando por H intersecta a semicircunferência no ponto P. Como o triângulo ABP é retângulo com ângulo reto em P, então $HP^2 = AH \cdot HB = bc = y^2$ e, portanto, $HP = y$. Traçamos a perpendicular a HP passando por P e, sobre essa perpendicular, construímos o segmento $PQ = a$. Como o triângulo HPQ é retângulo com ângulo reto em P, então $HQ^2 = PQ^2 + HP^2$ e, como $PQ = a$ e $HP = y$, segue que $HQ^2 = a^2 + y^2 = r^2$ e, portanto, $HQ = r$. Sobre um ângulo qualquer de vértice O' tomemos sobre um dos lados $O'A' = d$ e $A'C' = r = HQ$ e, sobre o outro lado, $O'B' = r = HQ$. Traçando por C' uma paralela à reta $A'B'$, determinamos D' na semirreta $O'B'$. Pelo Teorema de Tales, $O'A'/O'B' = A'C'/B'D'$, isto é, $d/r = r/B'D'$ e, como $d/r = r/x$, segue que $B'D' = x$.