**Resposta dos Exercícios sobre Paridade**

**1)** Vamos tomar 3 números como exemplo: 17, 23 e -31.

Se eu subtrair 1 de 17 e depois dividir por 4, terei, $\frac{17-1}{4}=\frac{16}{4}=4$, de modo que 17=4$×$4+1. Se eu subtrair 3 de 23 e depois dividir por 4, terei, $\frac{23-3}{4}=\frac{20}{4}=5$, de modo que 23=4$×$5+3. Se eu subtrair 1 de -31 e depois dividir por 4, terei, $\frac{-31-1}{4}=\frac{-32}{4}=-8$, de modo que -31=4$×$(-8)+1.

Em todos os casos, o objetivo foi tornar o número ímpar dado divisível por 4 subtraindo dele 1 ou 3. Concluímos que, se temos um inteiro ímpar, podemos subtrair dele 1 ou 3, de modo que ele se torna divisível por 4, provando que todo inteiro ímpar é da forma de 4k+1 ou 4k+3.

**2)** Temos 4 possibilidades em relação à paridade sendo *a* e *b* dois inteiros quaisquer:

1ª: Se *a* for par e *b* for ímpar, temos que *a+2b → par+par*$×$*ímpar → par+par → par*, de modo que *a+2b* é par, tal como *a.*

2ª: Se *a* for ímpar e *b* for par, temos que *a+2b→ ímpar+par*$×$*par* ***→*** *ímpar+par → par*, de modo que *a+2b* é ímpar, tal como *a.*

3ª: Se *a* for par e *b* for par, temos que *a+2b → par+par*$×$*par → par+par → par*, de modo que *a+2b* é par, tal como *a.*

4ª: Se *a* for ímpar e *b* for ímpar, temos que *a+2b→ímpar+par*$×$*ímpar → ímpar+par → ímpar*, de modo que *a+2b* é ímpar, tal como *a.*

Concluímos que *a+2b* tem sempre a mesma paridade de *a*, comprovando o que propôs o enunciado do problema.

**3)** Analogamente ao problema anterior, temos 4 possibilidades, em relação à paridade, sendo *m* e *n* dois inteiros quaisquer:

1ª: Se *m* for par e *n* for ímpar, temos que *m+n* e *m-n → par+ímpar* e *par-ímpar → ímpar* e *ímpar*, de modo que *m* e *n* têm a mesma paridade.

2ª: Se *m* for ímpar e *n* for par, temos que *m+n* e *m-n → ímpar+par* e *ímpar-par → ímpar* e *ímpar*, de modo que *m* e *n* têm a mesma paridade.

3ª: Se *m* e *n* forem pares, temos que *m+n* e *m-n → par+par* e *par-par → par* e *par*, de modo que *m* e *n* têm a mesma paridade.

4ª: Se *m* e *n* forem ímpares, temos que *m+n* e *m-n → ímpar+ímpar* e *ímpar-ímpar → ímpar* e *ímpar*, de modo que *m* e *n* têm a mesma paridade.

Podemos pensar que, se tivermos duas tabelas que regem a paridade das somas e diferenças dos números inteiros, essas tabelas seriam exatamente iguais, provando que, sendo *m* e *n* dois inteiros quaisquer, *m+n* e *m-n* terão sempre a mesma paridade.

**4)** Pensei o seguinte: se o resto é igual ao quadrado do quociente da divisão de um número por 17, as únicas possibilidades para esse resto e esse quociente, são os quadrados perfeitos de 1 até 17 e suas respectivas raízes, ou seja: Restos- 1, 4, 9 e 16. Quocientes- $\sqrt{1}=1, $ $\sqrt{4}=2,$ $\sqrt{9}=3$ e $\sqrt{16}=4.$

Sabendo os restos possíveis, os quocientes possíveis e o divisor (17), só nos resta saber os dividendos possíveis.

Para resto 1 e quociente 1, temos divisor 17 e dividendo 17$×$1+1=17+1=18.

Para resto 4 e quociente 2, temos divisor 17 e dividendo 17$×$2+4=34+4=38.

Para resto 9 e quociente 3, temos divisor 17 e dividendo 17$×$3+9=51+9=60.

Para resto 16 e quociente 4, temos divisor 17 e dividendo 17$×$4+16=68+16=84.

Assim, os únicos inteiros positivos que divididos por 17 deixam um resto igual ao quadrado do quociente são 18, 38, 60 e 84.

**5)** - **a)** Ao aplicar a fórmula $a\left(a^{2}-1\right)$ a um número ímpar, ele se torna divisível por 24. Por exemplo, aplicando a fórmula ao número 7, teremos $a\left(a^{2}-1\right)$=$ 7\left(7^{2}-1\right)=$ $7×\left(49-1\right)=7×48=336$. $\frac{336}{4}=14,$ e assim sucessivamente, de modo que qualquer número ímpar se torna divisível por 24 ao ser aplicado na fórmula. Também podemos pensar que $a\left(a^{2}-1\right)=$ $a^{3}-a$ e expressar da seguinte forma: “Qualquer inteiro ímpar ao cubo menos ele mesmo, resultará em um múltiplo de 24”.

 **b)** Quando se aplica a fórmula $a^{2}-b^{2}$ a dois inteiros ímpares, o resultado será divisível por 8. Por exemplo: se *a=5* e *b=3,* $a^{2}-b^{2}=5^{2}-3^{2}=25-9=16.$$ \frac{16}{8}=2$*,* ficando provando que quaisquer 2 inteiros ímpares aplicados a $a^{2}-b^{2}$ darão um resultado divisível por 8.

**6)** Se temos um número ímpar para multiplicar por outro ímpar, estaremos multiplicando um número ímpar de vezes, de modo que o resultado será sempre ímpar. Para compreender melhor, tomemos como exemplo 5$×7$. Eu terei a soma de 5 parcelas com 7 unidades cada uma: 7+7+7+7+7 ou *ímpar + ímpar + ímpar + ímpar + ímpar = par + ímpar + ímpar + ímpar = ímpar + ímpar + ímpar = par + ímpar = ímpar.*

Uma generalização deste fato é a seguinte: a paridade de uma soma de diversos números, só depende da paridade do número de parcelas ímpares. Se existir um número ímpar de parcelas ímpares, então, a soma será ímpar.

**7)** Assim como nos problemas 2 e 3, temos 4 possibilidades possíveis, em relação à paridade para *a* e *b*:

1ª: Se *a* for par e *b* for ímpar, temos que $a+b+a^{2}+b^{2}\rightarrow par+ímpar+\left(par×par\right)+\left(ímpar×ímpar\right)\rightarrow par+ímpar+par+ímpar \rightarrow ímpar+par+ímpar \rightarrow ímpar+ímpar\rightarrow par$, de modo que $a+b+a^{2}+b^{2}$ representa um par.

2ª: Se *a* for ímpar e *b* for par, temos que $a+b+a^{2}+b^{2}\rightarrow ímpar+par+\left(ímpar×ímpar\right)+\left(par×par\right)\rightarrow ímpar+par+ímpar+par \rightarrow ímpar+ímpar+par \rightarrow par+par\rightarrow par$, de modo que $a+b+a^{2}+b^{2}$ representa um par.

3ª: Se *a* for par e *b* for par, temos que $a+b+a^{2}+b^{2}\rightarrow par+par+\left(par×par\right)+\left(par×par\right)\rightarrow par+par+par+par \rightarrow par+par+par \rightarrow par+par\rightarrow par$, de modo que $a+b+a^{2}+b^{2}$ representa um par.

4ª: Se *a* for ímpar e *b* for ímpar, temos que $a+b+a^{2}+b^{2}\rightarrow ímpar+ímpar+\left(ímpar×ímpar\right)+\left(ímpar×ímpar\right)\rightarrow ímpar+ímpar+ímpar+ímpar \rightarrow par+ímpar+ímpar \rightarrow ímpar+ímpar\rightarrow par$, de modo que $a+b+a^{2}+b^{2}$ representa um par.

Podemos ver que, em qualquer circunstância, sendo *a* e *b* dois inteiros quaisquer, a expressão $a+b+a^{2}+b^{2} $sempre vai representar um par.

**8)** Podemos representar alguns múltiplos de 2 e de 4:

*M(2)={2,4,6,8,10,12,14,16,18,20...}*

*M(4)={4,8,12,16,20...}*

Vemos que a cada 2 múltiplos de 2, temos um múltiplo de 4, ou seja, a cada dois números divisíveis por 2, existe um divisível por 4, fazendo jus ao enunciado.

De outro ponto de vista, poderíamos pensar que se a cada dois pares consecutivos os dois são divisíveis por 2, então, é claro que um será divisível por 4.

**9)** Não. Se a primeira gira pra direita, a segunda gira pra esquerda e assim por diante. Podemos dizer que as “ímpares” giram pra direita e as “pares” pra esquerda. Assim, seria impossível as 11 engrenagens girarem simultaneamente já que a primeira e a décima primeira girariam para o mesmo lado.

**10)** Podemos pensar o seguinte: a cada vez que um cavalo faz um movimento, ele parará em uma casa com a cor oposta à que ele saiu. Para que ele volte a uma casa com a mesma cor se onde ele começou, ele precisará, obviamente, realizar um número par de movimentos.

**11)** Não. A posição h8 tem a mesma cor que a posição a1 e o cavalo terá que fazer (8$×8)-1=64-1$=63 movimentos para sair da posição a1 e terminar na posição h8 do tabuleiro visitando cada um dos outros quadrados restantes uma vez durante o jogo. Como ele vai para uma posição com a mesma cor do que a que ele estava, e a cada movimento ele troca de cor, após um número ímpar de movimentos (63) ele não poderia estar em uma posição de mesma cor a que ele saiu.

**12)** Não. Supondo que eles estejam na posição ABC, após o primeiro pulo, a posição será ACB e após o segundo, ABC novamente. Assim. A cada dois movimentos, eles voltam à posição inicial. Como 2011 é ímpar, seria impossível eles retornarem à posição inicial após essa quantidade de pulos.