Módulo: aritmética dos restos

Divisibilidade e Resto

Tópicos Adicionais

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Módulo: aritmética dos restos
Divisibilidade e resto

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Encontre os inteiros que, na divisão por 7, deixam um quociente igual ao resto.

Exercício 2. Determinar os números que, na divisão por 13, dão um quociente excedendo o resto em 4 unidades.

Exercício 3. Achar os números que, divididos por 14, dão resto igual ao triplo do quociente.

Exercício 4. Calcular o quociente de uma divisão, sabendo que aumentando 52 unidades ao dividendo e 4 unidades ao divisor, o quociente e o resto ficam os mesmos.

Exercício 5. Mostrar que todo número ímpar é a diferença de dois quadrados.

Exercício 6. Encontre o resto da divisão do número

a) $101 \cdot 102 \cdot 103 + 1$ na divisão por 4.

b) $73 \cdot 74 \cdot 75 + 2$ na divisão por 4.

Exercício 7. Sabendo que 1001 é múltiplo de 7, determine o resto de 10^{100} na divisão por 7.

Exercício 8. Se n é ímpar, qual o resto de $9n^2 + 3$ por 8?

Exercício 9. Se n é ímpar, qual o resto de n^2 por 8?

Exercício 10. Se n não é divisível por 3, qual o resto de $7n^4 + 1$ por 3?

Exercício 11. Determine o resto na divisão por 8 do número $1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + \ldots 99^2$.

Exercício 12. Determinar os números que divididos por 17 dão um resto igual ao quadrado do quociente correspondente.

Exercício 13. Encontre o quociente da divisão de $a^{64} - b^{64}$ por

$$(a^{32} + b^{32})(a^{16} + b^{16})(a^8 + b^8)(a^4 + b^4)(a^2 + b^2)(a + b)$$

Exercício 14. Encontre um inteiro que deixa resto 4 na divisão por 5 e resto 7 na divisão por 13

Exercício 15. Prove que, para todo inteiro positivo n o número $n^5 - 5n^3 + 4n$ é divisível por 120.

Exercício 16. (Fatorações Importantes)

a) Seja $S = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots + z^{n-1}$. Veja que se $S + z^n = 1 + zS$ então $S(z - 1) = z^n - 1$. Conclua que, para quaisquer x e y, vale:

$$\begin{aligned} x^n - y^n &= (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \ldots + \\ &+ x^2y^{n-3} + xy^{n-2} + y^{n-1}) \end{aligned}$$

b) Mostre que, se n é ímpar, vale:

$$\begin{aligned} x^n + y^n &= (x+y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \ldots + \\ &+ x^2y^{n-3} - xy^{n-2} + y^{n-1}) \end{aligned}$$

Exercício 17. Prove que, o número $1^{99} + 2^{99} + 3^{99} + 4^{99} + 5^{99}$ é múltiplo de 5.

Exercício 18. Mostre que o número $1^n + 8^n - 3^n - 6^n$ é multiplo de 10 para todo natural n.

2 Exercícios de Fixação

Exercício 19. Qual o resto que o número $1002 \cdot 1003 \cdot 1004$ deixa quando dividido por 7?

Exercício 20. Qual o resto que o número 4^{5000} deixa quando dividido por 3?

Exercício 21. Qual o resto que o número 2^{2k+1} deixa quando dividido por 3?

Exercício 22. a) Verifique que

$$a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a + 1).$$

b) Calcule o resto da divisão de 4^{2012} por 3.

Exercício 23. Encontre um número natural N que, ao ser dividido por 10, deixa resto 9, ao ser dividido por 9 deixa resto 8, e ao ser dividio por 8 deixa resto 7.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 24. Qual o resto de $n^3 + 2n$ na divisão por 3?

Exercício 25. Prove que, para cada n natural,

$$(n+1)(n+2)\ldots(2n)$$

é divisível por 2^n.

Exercício 26. Cada um dos naturais a, b, c e d é divisível por $ab - cd$, que também é um número natural. Prove que $ab - cd = 1$.

Exercício 27. A soma digital $D(n)$ de um inteiro positivo n é definido recursivamente como segue:

$$D(n) = \begin{cases} n & se \;\; 1 \leq n \leq 9, \\ \\ D(a_0 + a_1 + \ldots + a_m) & se \;\; n > 9, \end{cases}$$

onde $a_0, a_1, \ldots, a_m$ são todos os dígitos da expressão decimal de n na base 10, i.e.,

$$n = a_m 10^m + a_{m-1} 10^{m-1} + \ldots + a_1 10 + a_0$$

Por exemplo, $D(989) = D(26) = D(8) = 8$. Prove que: $D((1234)n) = D(n)$, para $n = 1, 2, 3 \ldots$

Exercício 28. Encontre todos os pares de inteiros positivos a e b tais que $79 = ab + 2a + 3b$.

Exercício 29. Prove que se $\dfrac{2^n - 2}{n}$ é um inteiro, então $\dfrac{2^{2^n - 1} - 2}{2^n - 1}$ também é um inteiro.

Exercício 30. (Extraído da Olimpíada Russa) Mostre que se n divide a então $2^n - 1$ divide $2^a - 1$.

Exercício 31. Provar que o número

$$\frac{1995 \cdot 1997^{1996} - 1996 \cdot 1997^{1995} + 1}{1996^2}$$

é um inteiro.

Exercício 32. Mostre que para n ímpar, n divide $1^n + 2^n + \ldots + (n-1)^n$

Exercício 33. Existe um natural n tal que $n^n + (n+1)^n$ é divisível por 2011?

Respostas e Soluções.

1. Seja n um inteiro que deixa quociente igual ao resto na divisão por 7, assim $n = 7q + r = 8r$. Como o resto não pode ser maior que divisor, os números procurados são $\{0, 8, 16, 24, \ldots, 8 \cdot 7\}$.

2. Se n representa o inteiro procurado, podemos escrever

$$n = 13q + r = 13(r + 4) + r = 14r + 52.$$

Como o resto não pode exceder o divisor, os inteiros procurados são $\{52, 14 \cdot 1 + 52, 14 \cdot 2 + 52, \ldots, 14 \cdot 12 + 52\}$.

3. Se n representa o inteiro procurado, podemos escrever $n = 14q + r = 17q$. Como o resto não pode exceder o divisor, segue que $0 \leq 3q < 14$, ou seja $0 \leq q \leq 4$. Consequentemente, o conjunto procurado é $\{17 \cdot 0, 17 \cdot 1, \ldots, 17 \cdot 4\}$.

4. Sejam n e d o dividendo e o divisor. Temos as seguintes equações:

$$\begin{aligned} n &= dq + r \\ n + 52 &= (d + 4)q + r. \end{aligned}$$

Subtraindo a primeira equação da segunda, obtemos $52 = 4q$, ou seja, $q = 13$.

5. Seja $n = 2k + 1$ um número ímpar, então

$$\begin{aligned} n &= 2k + 1 \\ &= k^2 + 2k + 1 - k^2 \\ &= (k + 1)^2 - k^2. \end{aligned}$$

6.

a) Como 101 deixa resto 1 na divisão por 4, segue que $101 \cdot 102 \cdot 103 + 1$ deixa o mesmo resto que $1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 = 7$, ou seja, deixa resto 3 na divisão por 4.

b) Como 73 deixa resto 1 na divisão por 4, segue que $73 \cdot 74 \cdot 75 + 2$ deixa o mesmo resto que $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 = 8$, ou seja, deixa resto 0 na divisão por 4.

7. Como $1001 = 10^3 + 1$, seque que 10^3 deixa o mesmo resto que -1 na divisão por 7 e que 10^{100} deixa o mesmo resto que $(10^3)^{33} \cdot 10$, ou seja, deixa o mesmo resto que $(-1)^{33} \cdot 10 = -10$. Basta ver agora que -10 deixa o mesmo resto que 4 na divisão por 7.

9. Se n é ímpar, podemos escrever $n = 2k + 1$. Portanto,

$$\begin{aligned} n^2 &= (2k + 1)^2 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 4k(k + 1) + 1. \end{aligned}$$

Como $k(k + 1)$ é o produto de dois números consecutivos, segue que $k(k + 1)$ é par. Logo, $4k(k + 1)$ é múltiplo de 8 e n^2 deixa resto 1.

9. Sabemos que se n é ímpar, então n^2 deixa resto 1 por 8. Portanto, $9n^2 + 3$ deixa o mesmo resto que $9 \cdot 1 + 3 = 12 = 8 \cdot 1 + 4$ na divisão por 8. Consequentemente, o resto procurado é 4.

10. Se n não é múltiplo de 3, então ou $n - 1$ ou $n + 1$ é um múltiplo de 3. Em qualquer caso, $n^2 - 1 = (n - 1)(n + 1)$ é múltiplo de 3 e consequentemente n^2 deixa resto 1 por 3. Portanto, $7n^4 + 1$ deixa o mesmo resto que $7 \cdot (1)^2 + 1 = 8 = 3 \cdot 2 + 2$. Ou seja, o resto procurado é 2.

11. Como o quadrado de um inteiro ímpar deixa resto 1 na divisão por 8 e a soma dada possui 50 termos, o resto procurado é igual ao resto de $50 \cdot 1 = 6 \cdot 8 + 2$ por 8. Portanto, a resposta é 2.

12. Escreva $n = 17q + q^2$ e note que $0 \leq q^2 < 17$. Assim, $q = 0, 1, 2, 3, 4$ e, consequentemente, os possíveis valores de n são

$$0, 18, 38, 60, 84.$$

13. (Extraído da Olimpíada Cearense) Usando a diferença de quadrados sucessivas vezes, podemos obter $(a - b)$ como quociente.

14. Se n deixa resto 7 na divisão por 13, segue que $n = 13q_1 + 7$. Dividindo q_1 por 5, podemos escrever $q_1 = 5q_2 + r$, com $r \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Substituindo o valor de q_1 na primeira equação, temos $n = 65q_2 + 13r + 7$. Dentre as cinco possibilidades de r, a única que faz n deixar resto 4 por 5 é $r = 4$. Portanto, os números que satisfazem essa propriedade são os números da forma $65k + 59$.

15. Basta mostrar que $n^5 - 5n^3 + 4n$ é múltiplo de 3, 8 e 5. Na divisão por 5, temos quatro restos possíveis: $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Assim, o número $n^5 - 5n^3 + 4n$ possui o mesmo resto na divisão por 5 que um dos cinco números: $\{0^5 - 5 \cdot 0^3 + 40, 1^5 - 5 \cdot 1^3 + 4, 2^5 - 5 \cdot 2^3 + 8, 3^5 - 5 \cdot 3^3 + 12, 4^5 - 5 \cdot 4^3 + 16\}$. Como todos esses números são múltiplos de 5, segue que $n^5 - 5n^3 + 4n$ é múltiplo de 5 para todo n inteiro. O procedimento com 3 e 8 é semelhante.

16. Para o item a), troque z por $\frac{x}{y}$. Para o item b), substitua y por $-y$ no item anterior.

17. Pelo problema anterior, como 99 é ímpar temos: $1^{99}+4^{99}=(1+4)(1^{98}+1^{97}\cdot 4+\ldots+1\cdot 4^{97}+4^{98})$. Daí, segue que $1^{99}+4^{99}$ é múltiplo de 5. Analogamente podemos mostrar que $2^{99}+3^{99}$ é múltiplo de 5.

18. O número em questão é mútiplo de 2 pois é a soma de dois ímpares e dois pares. Para ver que também é múltiplo de 5, basta notar que 5 divide 1^n-6^n e 8^n-3^n. Isso pode ser facilmente mostrado usando a fatoração do exercício 16.

19. Como 1002 deixa resto 1 por 7, o número acima deixa o mesmo resto que $1\cdot 2\cdot 3=6$ por 7.

20. Como 4 deixa resto 1 por 3, 4^{5000} deixa o mesmo resto que $\underbrace{1\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1}_{5000}=1$ por 3.

21. Note que 2^0 deixa resto 1 por 3, 2^1 deixa resto 2 por 3, 2^2 deixa resto 1 por 3, 2^3 deixa resto 2 por 3, 2^4 deixa resto 1 por 3. Precebeu alguma coisa? Como 100 é par, o resto deverá ser 1. Como 2^2 deixa resto 1, então $2^{2k}=\underbrace{2^2\cdot 2^2\cdot\ldots\cdot 2^2}_{k}$ deixa o mesmo resto que $\underbrace{1\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1}_{k}=1$ e $2^{2k+1}=2^{2k}\cdot 2$ deixa o mesmo resto que $1\cdot 2=2$ por 3.

22.

(a) Usando a distributividade e efetuando os devidos cancelamentos no lado direito, podemos escrever:

$$\begin{aligned} a^n+a^{n-1}+\ldots+a^2+a & \quad - \\ -a^{n-1}-a^{n-2}-\ldots-a-1 & \quad = \\ a^n-1. & \end{aligned}$$

(b) Veja que $3=4-1$ e assim é natural substituir os valores dados na expressão do primeiro item:

$$4^{2012}-1=3(4^{2011}+\ldots+4+1).$$

Isso significa que $q=(4^{2011}+\ldots+4+1)$ e que $r=1$.

23. O que acontece ao somarmos 1 ao nosso número? Ele passa a deixar resto 0 na divisão por $10, 9$ e 8. Assim, um possível valor para N é $10\cdot 9\cdot 8-1$.

24. Se o resto de n por 3 é r, o resto de n^3+2n é o mesmo de r^3+2r. Para $r=0$, esse resto seria 0. Para $r=1$, seria o mesmo resto de 3 que é 0. Finalmente, para $r=2$, o resto seria o mesmo de $8+4=12$ que também é 0. Assim, não importa qual o resto de n por 3, o número n^3+2n sempre deixará resto 0. Uma ideia importante nessa solução foi dividí-la em casos. Também poderíamos ter resolvido esse exemplo apelando para alguma fatoração:

$$\begin{aligned} n^3+2n &= n^3-n+3n \\ &= n(n^2-1)+3n \\ &= n(n-1)(n+1)+3n. \end{aligned}$$

Como $n-1, n$ e $n+1$ são consecutivos, um deles é múltiplo de 3. Assim, o último termo da igualdade anterior é a soma de dois múltiplos de 3 e consequentemente o resto procurado é 0.

25. Veja que

$$(n+1)(n+2)\ldots(2n)=\frac{1\cdot 2\cdots 2n}{1\cdot 2\cdots n}.$$

Para cada número natural k no produto escrito no denominador, temos uma aparição de $2k$ no produto escrito no numerador. Basta efetuarmos os cancelamentos obtendo:

$$(n+1)(n+2)\ldots(2n)=2^n\cdot 1\cdot 3\cdots(2n-1).$$

26. (Extraído da Olimpíada do Leningrado) Se chamarmos $p=ab-cd$, teremos $a=px, b=py, c=pz$ e $d=pt$ onde x,y,z e t são inteiros. Assim, $p=p^2(xy-zt)$. Consequentemente $1=p(xy-zt)$ e concluímos que $p=1$, pois p é natural.

27. Como $10^n-1^n=(10-1)(10^{n-1}+10^{n-2}+\ldots+1)$, podemos concluir que 10^n sempre deixa resto 1 na divisão por 9. Assim, $n=a_m10^m+a_{m-1}10^{m-1}+\ldots+a_110+a_0$, deixa o mesmo resto que $a_m+a_{m-1}+\ldots+a_0$ na divisão por 9. Desse modo, $D(n)$ nada mais é do que o resto na divisão por 9 do número n. Como 1234 deixa resto 1 por 9, o número $(1234)n$ deixa o mesmo resto que $1\cdot n$ por 9, ou seja, $D((1234)n)=D(n)$.

28. Fatoremos a expressão anterior. Somando 6 aos dois lados da equação, obtemos:

$$\begin{aligned} 85 &= 6+ab+2a+3b \\ &= (3+a)(2+b) \end{aligned}$$

Assim, $(3+a)$ e $(2+b)$ são divisores positivos de 85 maiores que 1. Os únicos divisores positivos de 85 são $1,5,19,85$. Logo, os possíveis pares de valores para $(3+a,2+b)$ são $(5,19)$ ou $(19,5)$ que produzem as soluções $(a,b)=(2,17)$ e $(16,3)$.

29. Se $k = \dfrac{2^n - 2}{n}$, então

$$\begin{aligned}
\frac{2^{2^n-1}-2}{2^n-1} &= \frac{2(2^{2^n-2}-1)}{2^n-1} \\
&= 2\left(\frac{2^{nk}-1}{2^n-1}\right) \\
&= 2\left(\frac{(2^n-1)(2^{n(k-1)}+\ldots+2^n+1)}{2^n-1}\right) \\
&= 2(2^{n(k-1)}+2^{n(k-2)}+\ldots+2^n+1),
\end{aligned}$$

é um número inteiro.

30. Se $a = nk$, temos $(2^n - 1)(2^{n(k-1)} + 2^{n(k-2)} + \ldots + 2^n + 1) = 2^{nk} - 1$.

31. (Extraído da Olimpíada do Cone Sul) Veja que $1995 \cdot 1997^{1996} - 1996 \cdot 1997^{1995} + 1 = 1995 \cdot (1997^{1996} - 1) - 1996 \cdot (1997^{1995} - 1)$. Pela fatoração de $x^n - y^n$, segue que

$$\frac{1996 \cdot (1997^{1995}-1)}{1996^2} = (1997^{1994} + 1997^{1993} + \ldots + 1),$$

é inteiro. Além disso, pela mesma fatoração, $\dfrac{1997^k - 1}{1996}$ é inteiro para todo k natural. Consequentemente

$$\begin{aligned}
\frac{1995 \cdot (1997^{1996}-1)}{1996^2} &= 1995 \cdot \left(\frac{1997^{1995}-1}{1996} + \right.\\
&+ \frac{1997^{1994}-1}{1996} + \ldots + \\
&+ \left.\frac{1997-1}{1996} + \frac{1996}{1996}\right),
\end{aligned}$$

é uma soma de números inteiros.

32. Como n é impar,

$$\begin{aligned}
(n-i)^n + i^n &= ((n-i)+i)((n-i)^{n-1} - (n-i)^{n-2}i + \\
&+ (n-i)^{n-3}i^2 - \ldots - (n-i)i^{n-2} + i^{n-1}).
\end{aligned}$$

é múltiplo de n. Portanto, a soma de números correspondentes em relação aos extremos da soma são sempre múltiplos de n.

33. Basta fazer $n = 1005$ e usar a fatoração de $x^n + y^n$.

PRODUZIDO POR ARQUIMEDES CURSO DE ENSINO
CONTATO@CURSOARQUIMEDES.COM