

**Roteiro de Estudos – OBMEP NA ESCOLA
Grupo N3 – Ciclo 7**

1. **Introdução**

Com mais de 10 anos de tradição, a OBMEP é muito mais do que a aplicação de uma prova e a entrega de medalhas e menções honrosas para alguns estudantes. Hoje a OBMEP é um programa nacional com ações diversificadas que têm contribuído para a melhoria da qualidade do ensino de matemática no país da 6ª série do ensino fundamental até o 3º ano do ensino médio.

Para aumentar ainda mais o impacto da OBMEP na melhoria da qualidade do ensino da matemática no país, o desafio consiste em envolver cada vez mais as escolas, as secretarias de ensino, os professores e os alunos nas ações propostas pela OBMEP ao longo de todo o ano escolar e na ampliação da utilização dos materiais didáticos elaborados pela OBMEP: provas anteriores, bancos de questões, apostilas, livros, plataformas virtuais, etc.

Desde a sua primeira edição, muitos desses materiais são enviados para as escolas e também são disponibilizados na internet. A partir de 2014, através do Programa OBMEP na Escola, esta sendo oferecida uma formação de professores que utiliza esses próprios materiais e promove encontros para os professores estudarem matemática, trocarem experiências e tirarem suas dúvidas para se sentirem mais seguros e preparados para utilizarem os materiais da OBMEP e trabalharem com a metodologia do ensino de matemática através da resolução de problemas.

A formação que o professor recebe e o aprendizado que ele adquire participando do Programa OBMEP na Escola são uteis e trarão consequências positivas para todos os alunos de todas as salas de aula que esse professor trabalhar. Entretanto, a aplicação do programa, em horário diferenciado, na sua turma de 20 alunos convidados terá um impacto bem maior e o aprendizado desses alunos e do professor será muito mais intenso.

Através do Programa OBMEP na Escola, da utilização cada vez maior dos materiais e dos recursos didáticos da OBMEP, da formação dos professores e da ampliação da divulgação da OBMEP nas escolas, entre outros resultados, deseja-se que:

* O número de alunos participantes da primeira fase da OBMEP aumente;
* Também aumente a qualidade da participação dos alunos na primeira fase, com o aumento das notas obtidas pelos alunos;
* As escolas divulguem e, de algum modo, valorizem os alunos que foram aprovados para a segunda fase;
* As escolas promovam ações metodológicas, em colaboração com os Professores Habilitados, para garantirem um bom desempenho dos alunos classificados para a segunda fase da OBMEP;
* A escola incentive fortemente e promova ações para garantir que todos os alunos classificados façam a prova da segunda fase da OBMEP, diminuindo drasticamente a evasão nesta prova;
* As escolas realizem cerimônias regionais de premiação dos alunos que receberam medalhas ou menção honrosa;
1. **Planejamento Acadêmico**

Em 2017, o Planejamento Acadêmico do Programa OBMEP na Escola prevê a realização de 7 ciclos de estudos com duração de quatro semanas cada um. A organização de cada ciclo é a seguinte:

* **1ª semana**: encontro de formação entre os coordenadores e os professores da Educação Básica que atuam no Programa OBMEP na Escola.
* **2ª semana**: (encontro 1) aula presencial de quatro horas ministrada por cada professor para a sua turma de alunos convidados.
* **3ª semana**: Período destinado para estudo dos alunos e preparação dos professores.
* **4ª semana**: (encontro 2) aula presencial de quatro horas ministrada por cada professor para a sua turma de alunos convidados.

Na primeira semana de cada ciclo, organizado pelos Coordenadores, é realizado o encontro de formação dos Professores da Educação Básica. Fortemente recomendado para ser presencial, este encontro é uma oportunidade para um estudo dos conteúdos matemáticos propostos no ciclo, através da leitura e da análise do que está proposto para ser executado nos encontros com os alunos. Também devem ser abordadas nesse encontro as listas de exercícios que serão utilizadas pelos professores nas aulas para os alunos convidados nos encontros 1 e 2, realizados na segunda e na quarta semana do ciclo.

O encontro entre professores e coordenadores não deve ser utilizado unicamente para discussões de assuntos administrativos. Mais do que isso, este é um encontro para estudo de matemática, dos materiais disponibilizados pela OBMEP, das listas de exercícios, das apostilas, das videoaulas, etc. Espera-se que após este encontro de formação, cada professor da escola básica se sinta mais seguro e preparado para ministrar as aulas para a sua turma de alunos convidados e, mais ainda, se sinta confortável para utilizar os materiais da OBMEP nas suas aulas regulares.

**1ª semana:** encontro de formação (Coordenadores e alunos de licenciatura)

No que segue vamos detalhar os conteúdos das duas aulas (encontro 1 e encontro 2) deste ciclo que devem ser ministradas para os alunos convidados, indicando referências bibliográficas e videoaulas relacionadas.

*-* Assuntos a serem abordados:

Os textos e vídeoaulas que o coordenador deve abordar com os professores e que eles deverão estudar para se preparem para as aulas com seus alunos são:

**Álgebra**: Equações e inequações quadráticas.

**Funções**: Funções quadráticas e seus gráficos.

- Material a ser estudado pelo professor:

Os textos e videoaulas que o coordenador deve abordar com os professores e que eles deverão estudar para se preparem para as aulas com seus alunos são:

**Álgebra**

- Textos:

1. Material Teórico do Portal da Matemática, “Equações do Segundo Grau: Resultados Básicos” – F. S. Benevides , A. C. M. Neto (revisor).

<http://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/3yjyn4r7tbggw>[.](http://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/3yjyn4r7tbggw.)

2. Material Teórico do Portal da Matemática, “Equações de Segundo Grau: outros resultados importantes” – F. S. Benevides , A. C. M. Neto (revisor).

<http://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/rimiriztlw08.pdf>

3. Caderno de Exercícios do Portal da Matemática, “Equações do Segundo Grau: Resultados Básicos”.

<http://matematica.obmep.org.br/uploads/material/equacoes.pdf>

4. Caderno de Exercícios do Portal da Matemática, “Relações entre coeficientes e raízes”.

<http://matematica.obmep.org.br/uploads/material/raizes.pdf>

5. Material Teórico do Portal da Matemática, “Gráfico da função quadrática e inequações de segundo grau” – F. S. Benevides , A. C. M. Neto (revisor).

<http://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/a32sy175734kc.pdf>

6. Material sobre equações e inequações do segundo grau, seções 2.10, 2.11, Prof. Francisco de Assis Magalhães Gomes.

http://www.ime.unicamp.br/~chico/ma091/precalculo2.pdf

- Videoaulas do Portal da Matemática:

1. No Módulo “Equações do Segundo Grau” (<http://matematica.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=25&tipo=1>), assistir as videoaulas:

##### Equação do 2o Grau – Parte 1: Exemplos e Definição

* Equação do 2o Grau – Parte 2: Exemplo
* Equação do 2o Grau – Parte 3: Resolução de Exercícios
* Equação do 2o Grau – Parte 4: Fórmula Resolvente da Equação do Segundo Grau
* Equação do 2o Grau – Parte 5: Resolução de Exercícios
* Equação do 2o Grau – Parte 6: Resolução de Exercícios
* Equação do 2o Grau – Parte 7: Resolução de Exercícios
* Equação do 2o Grau – Parte 8: Resolução de Exercícios
* Equação do 2o Grau – Parte 9: Resolução de Exercícios
* Equação do 2o Grau – Parte 10: Relações entre Coeficientes e Raízes Aula 1
* Equação do 2o Grau – Parte 11: Relações entre Coeficientes e Raízes Aula 2
* Equação do 2o Grau – Parte 12: Relações entre Coeficientes e Raízes Aula 3
* Equação do 2o Grau – Parte 13: Relações entre Coeficientes e Raízes Aula 4

**Funções**

- Textos:

1. Material Teórico do Portal da Matemática, “Função Quadrática: Definições, Máximos e Mínimos” – F. S. Benevides , A. C. M. Neto (revisor).

<http://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/83bz2u7aae0w8.pdf>

2. Material Teórico do Portal da Matemática, “Gráfico da função quadrática e inequações de segundo grau” – F. S. Benevides , A. C. M. Neto (revisor).

<http://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/a32sy175734kc.pdf>

3. Caderno de Exercícios do Portal da Matemática, “Noções Básicas: Definição, Máximos e Mínimos”.

<http://matematica.obmep.org.br/uploads/material/bqyo6wbk9qo8g.pdf>

4. Caderno de Exercícios do Portal da Matemática, “Resolução de Exercícios”.

<http://matematica.obmep.org.br/uploads/material/cspa0ku3yyiw.pdf>

5. Caderno de Exercícios do Portal da Matemática, “Gráfico de uma função quadrática”.

<http://matematica.obmep.org.br/uploads/material/flfb6cvdym80w.pdf>

- Videoaulas do Portal da Matemática:

1. No Módulo “Introdução à Função Quadrática” (<http://matematica.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=62&tipo=1>), assistir as videoaulas:

* Função Quadrática: Definição, Máximos e Mínimos
* Função Quadrática: Resolução de Exercícios – Parte 1
* Função Quadrática: Resolução de Exercícios – Parte 2
* Função Quadrática: Resolução de Exercícios – Parte 3

1. No Módulo “Função Quadrática” (<http://matematica.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=61&tipo=1>), assistir as videoaulas:

* Gráfico de uma Função Quadrática – Parte 1
* Gráfico de uma Função Quadrática – Parte 2
* Gráfico de uma Função Quadrática – Parte 3
* Função Quadrática: Resolução de Exercícios – Parte 1
* Função Quadrática: Resolução de Exercícios – Parte 2
* Função Quadrática: Resolução de Exercícios – Parte 3

##### Função Quadrática: Resolução de Exercícios – Parte 4

##### Função Quadrática: Resolução de Exercícios – Parte 5

##### Função Quadrática: Resolução de Exercícios – Parte 6

.

**ENCONTRO 1**

**2ª semana: aula para alunos convidados**

- Assuntos a serem abordados:

**Álgebra**: Equações e inequações quadráticas.

- Textos para consulta:

1. Material Teórico do Portal da Matemática, “Equações do Segundo Grau: Resultados Básicos” – F. S. Benevides , A. C. M. Neto (revisor).

<http://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/3yjyn4r7tbggw>[.](http://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/3yjyn4r7tbggw.)

2. Material Teórico do Portal da Matemática, “Equações de Segundo Grau: outros resultados importantes” – F. S. Benevides , A. C. M. Neto (revisor).

<http://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/rimiriztlw08.pdf>

3. Caderno de Exercícios do Portal da Matemática, “Equações do Segundo Grau: Resultados Básicos”.

<http://matematica.obmep.org.br/uploads/material/equacoes.pdf>

4. Caderno de Exercícios do Portal da Matemática, “Relações entre coeficientes e raízes”.

<http://matematica.obmep.org.br/uploads/material/raizes.pdf>

5. Material Teórico do Portal da Matemática, “Gráfico da função quadrática e inequações de segundo grau” – F. S. Benevides , A. C. M. Neto (revisor).

<http://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/a32sy175734kc.pdf>

6. Material sobre equações e inequações do segundo grau, seções 2.10 e 2.11, Prof. Francisco de Assis Magalhães Gomes.

<http://www.ime.unicamp.br/~chico/ma091/precalculo2.pdf>

- Exercícios a serem discutidos com os alunos: está disponibilizada uma lista de oito exercícios. O professor deverá propor os exercícios da lista para que os alunos resolvam. Acompanhando, individual ou coletivamente, a tentativa de resolução dos exercícios pelos alunos, o professor poderá perceber o nível de compreensão dos temas abordados. Para cada exercício da lista, sugere-se que pelo menos um dos alunos que o tenham resolvido apresente sua resolução para os demais alunos, e o professor acompanhe a resolução, corrigindo, destacando e aprofundando os conhecimentos matemáticos abordados. A ideia é que os temas abordados sejam assimilados pelos alunos durante a resolução dos exercícios, ou seja, a resolução dos exercícios deve provocar a necessidade de aprofundar os temas abordados. Se todos os exercícios da lista forem resolvidos durante o tempo do encontro, cabe ao professor propor exercícios adicionais sobre os assuntos abordados.

Lista de Exercícios – OBMEP NA ESCOLA – N3 – CICLO 7 – ENCONTRO 1

**ENUNCIADOS**

No que segue, apresentamos uma lista de problemas que devem ser utilizados para direcionar o estudo da aula com os alunos convidados. Esses exercícios devem ser trabalhados segundo a metodologia do ensino da matemática através da resolução de problemas e as discussões desses exercícios devem motivar o estudo dos conteúdos propostos para esta aula.

**Exercício 1.** Sejam e números inteiros positivos tais que . O professor Fernando disse ao aluno Raul que se ele calculasse o número , o resultado seria um quadrado perfeito. Raul, por engano, trocou os números e e calculou o número que, por acaso, também é um quadrado perfeito.

a) Mostre que .

b) Encontre os números e .

 *(Banco de Questões 2014, nível 3, questão 22*)

**Exercício 2.** Riquinho distribuiu reais entre os seus amigos: Antônio, Bernardo e Carlos da seguinte maneira: deu, sucessivamente, real ao Antônio, reais ao Bernardo, reais ao Carlos, reais ao Antônio, reais ao Bernardo, etc. Quanto que o Bernardo recebeu?

*(Banco de Questões 2007, Lista 3, nível 3, questão 5*)

**Exercício 3.** Se e são as raízes da equação , qual é o valor de ?

(a) (b) (c) (d) (e)

 *(Banco de Questões 2010, nível 3, questão 16*)

**Exercício 4.** Duas partículas, e , percorrem uma circunferência de *m* de comprimento. A partícula gasta segundos menos que , por estar animada com uma velocidade maior de metros por segundo. Qual é a velocidade de cada partícula?

 *(Banco de Questões 2007, Lista 8, nível 3, questão 1*)

**Exercício 5.** Na equação , os coeficientes e podem assumir quaisquer valores do intervalo Quais são os possíveis valores das raízes de tal equação?

*(Banco de Questões 2015, nível 3, questão 32*)

**Exercício 6.** Resolva em R a equação +.

*(Banco de Questões 2015, nível 3, questão 36*)

**Exercício 7.** Qual o menor valor da fração

*(Banco de Questões 2016, nível 3, questão 20*)

**Exercício 8.** No dia de seu aniversário em , o avô de Julia disse a ela: “Eu nasci no ano e completei anos em . Quantos anos eu completo hoje?”

A resposta certa é:

1. (B) 64 (C) 67 (D) 70 (E) 72

Lista de Exercícios – OBMEP NA ESCOLA – N3 – Ciclo 7 – Encontro 1

**SOLUÇÕES**

**Solução do Exercício 1.** a) Note que

Assim, é um quadrado perfeito entre os quadrados perfeitos e , e

então .

b) Pelo item anterior,

e então . Substituindo em , obtemos . Note agora que

Isto é, é um quadrado perfeito entre os quadrados perfeitos e .

Temos assim dois possíveis casos: ou .

**Caso I:** . Nesse caso, teríamos

e, portanto, não seria um número inteiro.

**Caso II:** . Nesse caso, teríamos

 ,

e daí e Finalmente,

e

**Solução do Exercício 2.** O dinheiro foi repartido em parcelas na forma

Como  *é* a soma dos primeiros números naturais a

partir de temos:

Temos que

 para valores de entre as raízes *.*

Como a solução positiva de

então . Assim Bernardo recebeu

**Solução do Exercício 3.** A opção correta é (d).

**Solução 1:** Como e são as raízes da equação , temos e , ou seja, e . Somando essas duas equações, resulta , ou seja,

**Solução 2**: Numa equação do segundo grau, a soma das raízes é

 e o produto é . Como , obtemos e

ou seja, . Assim, .

**Solução do Exercício 4.** Seja a velocidade da partícula e a velocidade de . Assim, o tempo que demora em dar uma volta é e o tempo tempo que demora  é que é três segundos a menos do que , portanto,

A raiz positiva dessa equação é

.

Portanto, a velocidade de é e a velocidade de é .

**Solução do Exercício 5.** As raízes da equação são dadas por . O valor máximo de tal expressão deve ocorrer quando e forem máximos. Como e , segue que

De modo similar, podemos verificar que o valor mínimo é . Se é uma raiz de tal equação e é tal que , então é uma raiz de e os coeficientes ainda estão em Consequentemente, todos os os números do intervalo podem ser raízes de tais equações e, como vimos no início, nenhum outro número fora deste intervalo pode sê-lo.

**Solução do Exercício 6.** Podemos eliminar radicais elevando membros da equação abaixo ao quadrado:

Logo

Consequentemente, , ou seja . Para verificar que é a solução, basta escrever

**Solução do Exercício 7.** Temos

Se então o problema se resume a encontrarmos o mínimo de

. Como o gráfico, em função de , da função

é uma parábola, o mínimo será atingido quando *v= -*.

Outra maneira de ver isto, é fazer o completamento de quadrados:

pois todo quadrado perfeito é não negativo. A igualdade ocorre apenas se

e o valor mínimo é, portanto, . Note que se, e somente se, , ou seja, . A resposta é , que ocorre quando .

**21**

**Solução do Exercício 8.** O que o avô de Júlia disse pode ser escrito como

Ou seja, . Logo ; esta equação tem as raízes

Segue que em 1980 o avô de Júlia tinha 44 anos e assim, em 2006, ele completa

 anos.

Comentário: Um modo rápido de calcular é notar que Daí segue que é número próximo de e menor que terminando em 1 ou 9. Os candidatos naturais são 81 e 89, e verifica-se imediatamente que

**ENCONTRO 2**

**4ª semana: aula para alunos convidados**

- Assuntos a serem abordados:

**Funções**: Funções quadráticas e seus gráficos.

- Textos para consulta:

1. Material Teórico do Portal da Matemática, “Função Quadrática: Definições, Máximos e Mínimos” – F. S. Benevides , A. C. M. Neto (revisor).

<http://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/83bz2u7aae0w8.pdf>

2. Material Teórico do Portal da Matemática, “Gráfico da função quadrática e inequações de segundo grau” – F. S. Benevides , A. C. M. Neto (revisor).

<http://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/a32sy175734kc.pdf>

3. Caderno de Exercícios do Portal da Matemática, “Noções Básicas: Definição, Máximos e Mínimos”.

<http://matematica.obmep.org.br/uploads/material/bqyo6wbk9qo8g.pdf>

4. Caderno de Exercícios do Portal da Matemática, “Resolução de Exercícios”.

<http://matematica.obmep.org.br/uploads/material/cspa0ku3yyiw.pdf>

5. Caderno de Exercícios do Portal da Matemática, “Gráfico de uma função quadrática”.

<http://matematica.obmep.org.br/uploads/material/flfb6cvdym80w.pdf>

- Exercícios a serem discutidos com os alunos: está disponibilizada uma lista de oito exercícios. O professor deverá propor os exercícios da lista para que os alunos resolvam. Acompanhando, individual ou coletivamente, a tentativa de resolução dos exercícios pelos alunos, o professor poderá perceber o nível de compreensão dos temas abordados. Para cada exercício da lista, sugere-se que pelo menos um dos alunos que o tenham resolvido apresente sua resolução para os demais alunos, e o professor acompanhe a resolução, corrigindo, destacando e aprofundando os conhecimentos matemáticos abordados. A ideia é que os temas abordados sejam assimilados pelos alunos durante a resolução dos exercícios, ou seja, a resolução dos exercícios deve provocar a necessidade de aprofundar os temas abordados. Se todos os exercícios da lista forem resolvidos durante o tempo do encontro, cabe ao professor propor exercícios adicionais sobre os assuntos abordados.

Lista de Exercícios – OBMEP NA ESCOLA – N3 – Ciclo 7 – Encontro 2

**ENUNCIADOS**

**Exercício 1.** A função está definida para cada de modo

que área do quadrilátero sombreado, como indicado na figura abaixo.



(a) Escreva as equações das retas e .

(b) Determine .

(c) Escreva a expressão de

(d) Esboce o gráfico de .

*(Banco de Questões 2009, Lista 7, nível 3, questão 4*)

**Exercício 2.** Para castigar os alunos de sua turma por indisciplina, o professor Zerus decidiu descontar da nota mensal de cada aluno uma percentagem igual à nota da prova, isto é: quem tirou , terá um desconto de na nota, quem tirou , um desconto de da nota, e assim por diante. A nota mensal máxima é .

(a) Quem vai ficar com a maior nota?

(b) E a menor?

(c) Alunos que tiraram boas notas reclamaram que vão ficar com a mesma nota dos

que tiraram más notas. Eles estão certos?

 *(Banco de Questões 2009, Lista 7, nível 3, questão 1*)

**Exercício 3.** O quadrado desenhado na figura abaixo tem lado cm.



Os pontos e podem ser deslocados sobre os segmentos e respectivamente

de forma que o comprimento do segmento meça a metade do comprimento do segmento .

a) Determine o valor da área do quadrilátero hachurado em função do comprimento

do segmento .

b) Determine a área máxima que o quadrilátero hachurado pode assumir.

*(Banco de Questões 2014, nível 3, questão 9*)

**Exercício 4.** Uma bola, ao ser chutada num tiro de meta por um goleiro, numa partida de futebol, teve sua trajetória descrita pela equação , onde é o tempo medido em segundo e é a altura em metros da bola no instante . Determine, apos o chute:

a)o instante em que a bola retornará ao solo.

b)a altura atingida pela bola.

**Exercício 5.** Calcule o valor de de modo que a função não tenha raízes, isto é, o gráfico da parábola não possui ponto em comum com o eixo .

**Exercício 6.** Um móvel realiza um MUV obedecendo à função , sendo medido em metros e em segundos. Em que instante o móvel muda de sentido?

**Exercício 7.** Seja a função quadrática representada no gráfico abaixo:



Essa função é dada por:

1.
2.
3.

**Exercício 8.** Determine para que valores de o gráfico da função real definida por intercepte o eixo dos em dois pontos distintos.

Lista de Exercícios – OBMEP NA ESCOLA – N3 – Ciclo 7 – Encontro 2

**SOLUÇÕES**

**Solução do Exercício 1.** (a) A reta passa pelo ponto, logo tem equação *y* = *mx* + 2. Como ela passa

pelo ponto verifica-se que , que implica . Assim, tem

equação

A reta passa pelo ponto logo, e como passa também pelo ponto verifica-se que , que implica . Logo, tem equação

(b) é a área do triângulo mais a área do trapézio , sendo o ponto

de encontro de e



Para determinar fazemos: de onde . Substituindo esse valor na equação de ou obtemos . Logo, . A altura do triângulo , em relação à base , é . O ponto pertence à reta e tem logo tem-se ou seja. Então . Logo, a área do triângulo *\_ é* igual a e a área do trapézio é .

Logo,

.

 (c) é igual a menos a área do trapézio de altura e bases e , sendo a

abscissa do ponto da reta que tem ordenada , logo

Daí temos

 (d)

O gráfico de é uma parábola côncava para cima. As coordenadas do vértice são:

e

Logo Como o gráfico de com é a parte em linha grossa.

****

**Solução do Exercício 2.** Quem teve como nota mensal vai ter um desconto de sobre essa nota, ou seja vai perder

 de

Logo, depois do castigo, a nota fica sendo , onde era a nota inicial.

Consideremos a função “nota depois do castigo” dada por . Como as

notas máximas e mínimas são e , vamos considerar essa funçãoo no domínio ou seja, para . O gráfico de é uma parábola com concavidade para baixo, e seu valor máximo ocorre no vértice: Sendo assim, a maior nota depois do castigo é para os alunos que antes do castigo tiraram . Essa nota é

.

O valor mínimo dessa função é ocorre em e . Logo a menor nota ocorre para os alunos que tiraram ou (!!!!!) antes do castigo. De fato,



**Solução do Exercício 3.** a) Chamemos de o comprimento do segmento e denotaremos por o

valor da área do quadrilátero em função de , medida em centímetros

quadrados. Como o comprimento de é a metade do comprimento do segmento

, temos que o valor máximo que pode ser assumido por é cm. O nosso

objetivo é encontrar uma expressão para

Como o segmento mede o dobro do segmento , temos que o seu comprimento

é igual a . Logo o segmento mede . Daí concluímos que a área

do triângulo é dada, em centímetros quadrados, por e a área

do triângulo por

Como a área da região hachurada é igual à área do quadrado ( )

menos a soma das áreas dos triângulos e , temos que será dada,

em centímetros quadrados, por:

para .

b) A função do segundo grau obtida no item anterior fornece

a área do quadrilátero em termos do valor do comprimento do segmento

 que denotamos por . O seu gráfico é uma parábola côncava para baixo,

conforme mostra a figura abaixo:



Assim, o nosso objetivo é encontrar o máximo assumido por essa função com

variando entre e . Para uma parábola que é o gráfico de uma função do tipo

, a coordenada do vértice é dada por = . Se a parábola é

côncava para baixo, então a função correspondente atinge o máximo exatamente

para . No nosso caso, com e , temos que = . Como

pertence ao intervalo estipulado para os valores que pode assumir, temos que

o valor máximo assumido por é igual a .

**Solução do Exercício 4.** a) Houve dois momentos em que a bola tocou o chão: o primeiro foi antes de ela ser chutada e o segundo foi quando ela terminou sua trajetória e retornou para o chão. Em ambos os momentos a altura era igual a zero, sendo assim:

Logo implica , isto é, ou .

Portanto, o segundo momento em que a bola tocou no chão foi no instante de quatro segundos.

b) A altura máxima atingida pela bola é dada pelo vértice da parábola. As coordenadas do seu vértice podem ser encontradas através de:

 e

No caso apresentado, é interessante encontrar apenas :

Portanto, a altura máxima atingida pela bola foi de metros.

**Solução do Exercício 5.** Paraque a função não tenha raízes o discriminante deve ser estritamente menor que zero, isto é, .

Como e temos que logo implica que

O valor de para que a função não tenha raízes reais deve ser menor que – 1.

**Solução do Exercício 6.** A equação do movimento é uma equação do segundo grau, então ela descreve uma parábola crescente (a > 0), a mudança de sentido do móvel dará no momento em que ele atingir o ponto mínimo da parábola. Observe a ilustração do movimento do móvel:



Devemos calcular o ponto mínimo da parábola, dado por:

Portanto, o móvel muda de sentido no instante segundos.

**Solução do Exercício 7.** A forma geral de uma função do segundo grau (parábola) é

dada por: .

Sabemos (do gráfico acima) que e são raízes da equação, logo, para estes valores, a função se anula:

• 0 = a . (0) + b . (0) + c, donde retiramos o valor de . Este ponto também poderia ter sido retirado diretamente do gráfico, pois é o ponto em que a curva corta o eixo .

• ou seja, (\*)

• Uma outra equação poderá ser retirada a partir do vértice da parábola:

 ou seja, (\*\*)

Por (\*) e (\*\*) temos o seguinte sistema

 Dividindo-se a primeira equação por , obtemos:

 Somando-se membro-a-membro, obtemos . Substituindo-se esse valor em uma das equações do sistema, teremos

Com os coeficientes calculados, encontramos a equação da curva .

**Solução do Exercício 8.** A condição para que haja duas raízes reais distintas (isto é, o gráfico da função corta o eixo em dois pontos distintos) é que o discriminante da equação quadrática seja positivo.

Assim . Na equação dada, temos: .

Substituindo-se na fórmula, vem ⇒ 4 > 0 (\*).

 As raízes da equação 4 são Para qualquer ponto , teremos que 4 assume valores estritamente positivos, que é o que se deseja neste caso.

 Portanto o gráfico da função corta o eixo em dois pontos distintos se , .