

ENCONTRO 17 – 29/11/16 – Contagem: Combinações Completas

Uma pessoa quer comprar 6 empadas numa lanchonete. Há empadas de camarão, frango, legumes e palmito. Sabendo que podem ser compradas de 0 à 6 empadas de cada tipo, de quantas maneiras diferentes esta compra pode ser feita?

SOLUÇÃO:

Estamos com um caso de número de soluções inteiras e não negativas de uma equação linear.

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = p \longrightarrow CR_{n,p} = P_{n+p-1}^{n-1,p} = C_{n+p-1,p}$$

$n = n^{\circ}$ de incógnitas, p é o termo constante.

$C + F + L + P = 6$ Fazendo o processo com barras e sinais de +

$$| + | | | + | | + = 6 \longrightarrow (1, 3, 2, 0)$$

$$C=1 \quad F=3 \quad L=2 \quad P=0$$

Portanto temos uma Permutação de 9 elementos com repetição de 6 e 3 (que são as 6 barras e os 3 sinais de +).

$$P_{4+6-1}^{3,6} = P_9^{3,6} = \frac{9!}{6!3!} = 84$$

Uma pessoa quer comprar 6 empadas numa lanchonete. Há empadas de camarão, frango, legumes e palmito. Sabendo que podem ser compradas de 1 à 6 empadas de cada tipo, de quantas maneiras diferentes esta compra pode ser feita?

SOLUÇÃO:

Neste caso estamos diante de número de soluções inteiras e positivas de uma equação linear.

$$C + F + L + P = 6$$

$$C = 1 + c, \quad F = 1 + f, \quad L = 1 + f, \quad P = 1 + p \quad \text{substituindo...}$$

$$1 + c + 1 + f + 1 + f + 1 + p = 6$$

$$c + f + f + p = 2$$

Agora temos soluções inteiras e não negativas de uma equação linear.

Fazendo o processo com barras e sinais de +

$$| + | + + = 2 \quad \longrightarrow \quad (1, 1, 0)$$

Portanto temos uma Permutação de 5 elementos com repetição de 2 e 3 (que são as 6 barras e os 3 sinais de +).

$$P_5^{3,2} = \frac{5!}{2!3!} = 10$$

Outra solução:

$$C + F + L + P = 6$$

Não posso colocar os sinais de + nessas posições:

+ |, se for a 1ª barra, | +, se for a última barra e nem ++, pois quer dizer que tem um 0 entre os dois sinais, que corresponde à alguma variável.

Então, vamos colocar os 3 sinais de + entre as barras e verificar e verificar de quantas maneiras esses 3 sinais podem ser colocados.

$$| - | - | - | - | - | = 6$$

Isso, nos deixa diante de uma escolha dentre 5 elementos (espaços entre as barras), escolher 3. Que é uma combinação simples:

$$C_{n,r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$C_{5,3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! 2!} = 10$$

- I) Quantas são as soluções inteiras não negativas de $x + y + z + w = 6$?

- II) Quantos são os anagramas da palavra "PIRACICABA" que não possuem duas letras "A" adjacentes?

- III) De quantos modos podem ser pintados 9 objetos iguais usando 3 cores diferentes?