Coordenação de Matemática – Prof. André Costa

Módulo 1 – Aritmética

Múltiplos: $M_a = a\mathbb{Z} = \{a \times d; d \in \mathbb{Z}\}$ conjunto dos múltiplos inteiros de a.

Divisor: d é divisor de a, se a é múltiplo de d; ou seja, se $a = d \times c$, para algum c.

(a é múltiplo de d é equivalente a dizer que a é divisível por d, ou que d divide a. Representamos por $d|a$)

MMC: o menor múltiplo comum de a e b, denotado por $mmc(a,b) = [a,b] = min(\mathbb{N} \cap a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z})$

Problema 3.8. (A.Hefez) Mostre que os múltiplos inteiros comuns de dois elementos a e b possuem as seguintes propriedades:
(i) 0 é múltiplo comum de a e b.
(ii) Se m é um múltiplo comum de a e b, então $-m$ é múltiplo comum de a e b.
(iii) Um múltiplo de um múltiplo comum de a e b é um múltiplo comum de a e b.
(iv) Se m e m' são múltiplos comuns de a e b, então $m + m'$ e $m - m'$ são também múltiplos comuns de a e b.
(v) Se m e m' são múltiplos comuns de a e b, então $e \times m + f \times m'$ é múltiplo comum de a e b, quaisquer que sejam os inteiros e e f (note que (iv) é um caso particular da presente propriedade).
(vi) Se $m + m'$ ou $m - m'$ é múltiplo comum de a e b e m é múltiplo comum de a e b, então m' é múltiplo comum de a e b.

Problema 3.9 (A.Hefez) Suponha que os números 216 e 144 sejam múltiplos comuns de um determinado par de números a e b. Mostre que mmc(a, b) $\leq$ 72.

Problema 3.12. (A.Hefez) Enuncie critérios de divisibilidade por 3, 4, 5, 8, 9 e 10.

Primo: Um número $p > 1$ é primo se só possui 1 e o próprio p como divisores positivos.

MDC: Dados dois números inteiros a e b não simultaneamente nulos, o maior divisor comum de a e b será chamado de máximo divisor comum de a e b e denotado por $mdc(a,b) = (a,b)$.

Primos entre si: a e b são primos entre si se $(a,b) = 1$

Problema 3.13. (A.Hefez) Mostre as seguintes propriedades importantes da divisibilidade:
(a) Se d | a e d | b, então d | (b + a) e d | (b − a).
(b) Se d | (b + a) ou d | (b − a) e d | a, então d | b.
(c) Conclua que d é um divisor comum de a e de b se e somente se d é um divisor comum de a e de b – a, em particular, $(a,b) = (a, b-a)$.

Problema 3.16.
(a) Mostre que dois números inteiros da forma n e 2n+1 são sempre primos entre si.
(b) Mostre que se n é um número ímpar, então (n, 2n + 2) = 1.
(c) Mostre que se n é um número par, então (n, 2n + 2) = 2.

Algoritmo da Divisão de Euclides: Dados p e $d > 0$, inteiros, existem únicos q e r inteiros, com $0 \leq r < d$, tal que

$$\boldsymbol{p = qd + r}$$

Problema 3.18/19. Efetue a divisão euclidiana nos seguintes casos:
(a) de 43 por 3 e de -43 por 3
(b) de 43 por 5 e de -43 por 3
(c) de 233 por 4 e de -233 por 4

Par ou Ímpar: O conjunto $\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$

Problema 3.29. Determine a paridade do seguinte número:

$$(123275 + 346231)^{234} + (3451 + 4532)^{542}$$

Problema 3.30. Mostre que para todos a inteiro e n natural não nulos, os números a e a^n têm mesma paridade.

Problema 3.31. Dado um número inteiro a e dados dois números naturais n e m, não nulos, mostre que são sempre pares os números

$$a^n + a^m \quad \text{e} \quad a^n - a^m$$

Problema 3.32. Qual é a paridade da soma dos números naturais de um a 10? E de seu produto?

Lista de Problemas

1. Você pode encontrar cinco números ímpares cuja soma seja 1000?

2. Resolva:
a) (Fomin, capítulo 1, problema 16) É possível trocar uma nota de 25 rublos em dez notas com valores 1, 3 ou 5 rublos?

b) (Fomin, capítulo 1, problema 17) Pedro comprou um caderno com 96 folhas e numerou-as de 1 a 192. Vitor arrancou 25 folhas do caderno de Pedro e somou os 50 números que encontrou escritos nas folhas. Esta soma poderia ser igual a 1990?

c.1) (Fomin, capítulo 1, problema 20) Os números de 1 a 10 estão escritos em uma linha. Pode-se colocar os sinais de " $+$ " e de " $-$ " entre eles de modo que o valor da expressão resultante seja igual a zero?

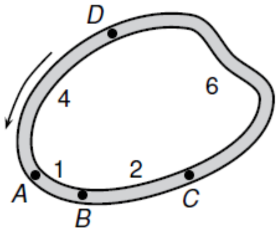
c.2) Continuando o exercício anterior, vamos imaginar que os números de 1 a 11 estão escritos em uma linha. Pode-se colocar os sinais de " $+$ " e de " $-$ " entre eles de modo que o valor da expressão resultante seja igual a zero?

c.3) (Desafio) Mostre que sempre que a soma dos números de 1 a n é par, então é possível separar os números de 1 a n em dois subgrupos de números de igual soma.

3. Resolva:
a) (Fomin, capítulo 1, problema 8) Um tabuleiro 5x5 pode ser coberto por dominós 1x2?

b) (Fomin, capítulo 1, problema 23) Considere um tabuleiro de xadrez (com 8x8 = 64 casas). Suponha que você tenha peças de dominó, cada uma com o tamanho exato de duas casas do tabuleiro. Observe que, deste modo, pode-se cobrir todo o tabuleiro de xadrez com exatamente 32 peças de dominó. Quando são retiradas do tabuleiro duas casas diagonalmente opostas, ainda é possível cobri-lo com 31 peças de dominó?

4. (OBMEP/06 - 2ª fase – N3) A figura representa o traçado de uma pista de corrida. Os postos A, B, C e D são usados para partidas e chegadas de todas as corridas. As distâncias entre postos vizinhos, em quilometros, estão indicadas na figura e as corridas sãao realizadas no sentido indicado pela flecha. Por exemplo, uma corrida de 17 km pode ser realizada com partida em D e chegada em A.



a) Quais são os postos de partida e chegada de uma corrida de 14 quilômetros?
b) E para uma corrida de 100 quilômetros, quais são esses postos?
c) Mostre que e possível realizar corridas com extensão igual a qualquer número inteiro de quilômetros.

5. (OBMEP/07 - 2ª fase – N3) Fernando e Isaura inventaram um jogo diferente, cujas regras são as seguintes:

1. eles começam uma partida com 128 palitos cada um;
2. em cada jogada, eles tiram par ou ímpar; se sai par, Fernando dá metade dos palitos que tem para Isaura e, se sai ímpar, Isaura dá a metade dos palitos que tem para Fernando.
3. eles repetem o procedimento da regra 2 até que um deles fique com um número ímpar de palitos, quando a partida acaba. Ganha quem ficar com maior número de palitos.

Veja o que acontece em uma partida onde a sequência das três primeiras jogadas é **par**, **ímpar**, **par**:

Fernando	Isaura	par → 1ª jogada	Fernando	Isaura	ímpar → 2ª jogada	Fernando	Isaura	par → 3ª jogada	Fernando	Isaura	
128	128		64	192		160	96		80	176	...

a) Complete o esquema com o número de palitos de Fernando e Isaura, de acordo com as jogadas indicadas.

Fernando	Isaura	ímpar → 1ª jogada	Fernando	Isaura	ímpar → 2ª jogada	Fernando	Isaura	par → 3ª jogada	Fernando	Isaura	
128	128										...

b) Uma partida acabou quando Fernando ficou com 101 palitos. Na última jogada saiu par ou ímpar?
c) Qual foi a sequência de pares e ímpares da partida que acabou quando Fernando ficou com 101 palitos?
d) Mostre que qualquer partida acaba com exatamente sete jogadas.

6. (OBMEP/11 - 2ª fase – N3) Começando com qualquer número natural não nulo é sempre possível formar uma sequência de números que termina em 1, seguindo repetidamente as instruções abaixo:

- se o número for ímpar, soma-se 1;
- se o número for par, divide-se por 2.

Por exemplo, começando com o número 21, forma-se a seguinte sequência:

$$21 \to 22 \to 11 \to 12 \to 6 \to 3 \to 4 \to 2 \to 1$$

Nessa sequência aparecem nove números; por isso, dizemos que ela tem comprimento 9. Além disso, como ela começa com um número ímpar, dizemos que ela é uma sequência ímpar.
a) Escreva a sequência que começa com 37.
b) Existem três sequências de comprimento 5, sendo duas pares e uma ímpar. Escreva essas sequências.
c) Quantas são as sequências pares e quantas são as sequências ímpares de comprimento 6? E de comprimento 7?
d) Existem ao todo 377 sequências de comprimento 15, sendo 233 pares e 144 ímpares. Quantas são as sequências de comprimento 16? Dessas, quantas são pares? Não se esqueça de justificar sua resposta.

7. (OBMEP/16 1ª fase – N3) Quantos são os números naturais n tais que $\frac{5n-12}{n-8}$ é também um número natural?

8. (IFPE) Qual número devemos somar a 1996^2 para obter 1997^2?

9. Sobre os números da sequência $F_n = n^5 - n$, n natural podemos afirmar que:
0-0 São múltiplos de 3.
1-1 Não podem ser múltiplos de 7.
2-2 Não são primos.
3-3 São divisíveis por 30.
4-4 São múltiplos de 4.

10. (COVEST) Sejam m e n números naturais distintos e pares tais que $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{4}$. Determine o produto de m por n.