Programa de Iniciação Científica da OBMEP

Aula 3 – 5º Encontro

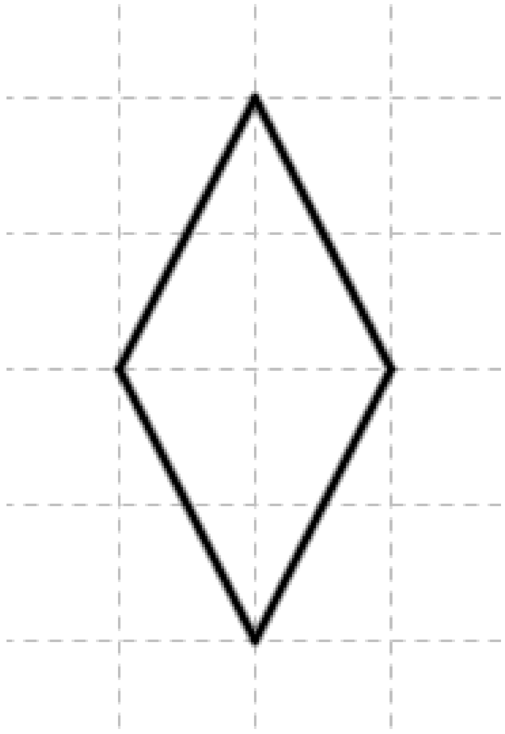
Paralelismo: Quadriláteros Notáveis

09/11/2016

1. (Círculo Matemático de Moscou, problema 5.1, pg 11) Todos os quatro lados de um quadrilátero são congruentes. Ele necessariamente é um quadrado?

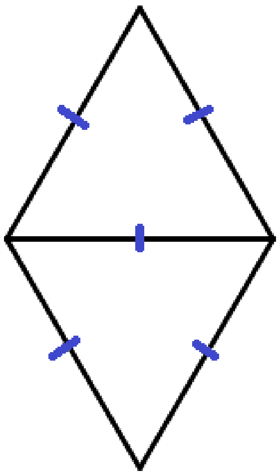
1) Não necessariamente, pois temos o losango que é um quadrilátero que possui todos os lados congruentes.

Só é um quadrado quando todos os seus ângulos também são congruentes.

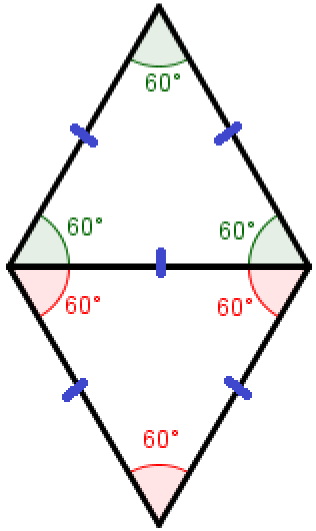


2. (Círculo Matemático de Moscou, problema 6.1, pg 13) Uma das diagonais de um losango é igual a um de seus lados. Quais são as medidas dos ângulos do losango?

2) Observe que um losango terá os 4 lados iguais quando for desenhada uma diagonal de mesmo comprimento que um dos lados, o losango será dividido em dois triângulos equiláteros.



Cada triângulo tem três ângulos de 60 graus, logo o losango tem dois ângulos de 60 graus e dois ângulos de 120 graus.

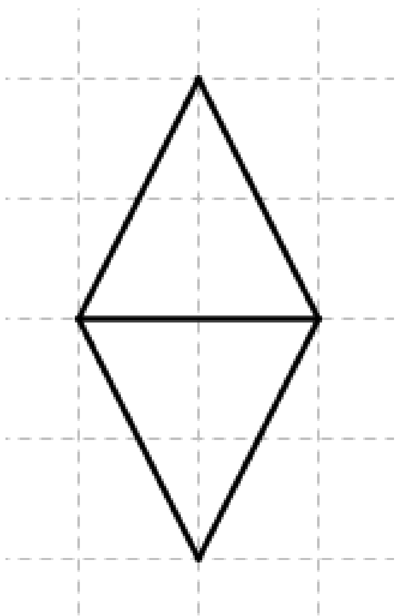


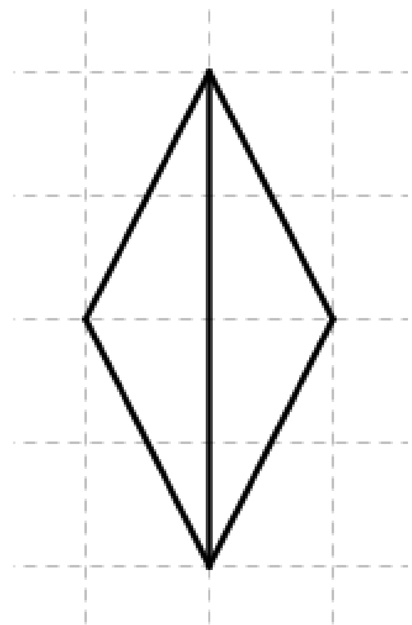
3. (Círculo Matemático de Moscou, problema 11.1, pg 23) Para verificar se um pedaço de pano é quadrado, um alfaiate dobra ele ao longo de cada uma das suas diagonais e verifica se as arestas coincidem. Basta fazer isso?

3) Não.

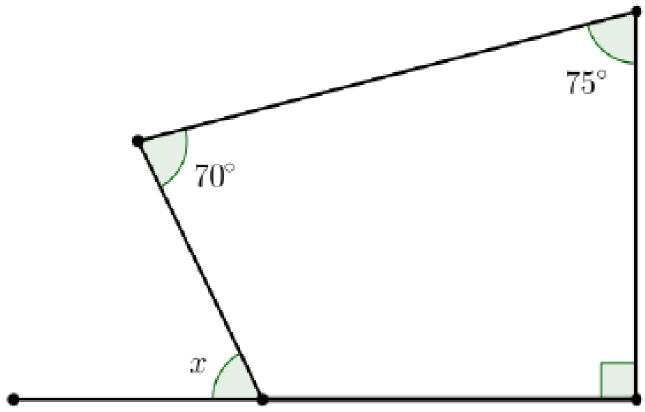
Podemos pegar qualquer losango que não seja um quadrado.

Observe que ao dobrá-lo ao longo de qualquer diagonal suas arestas coincidirão.

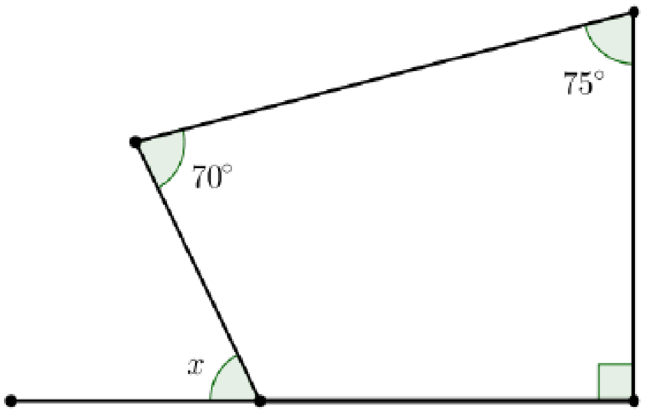




4. (Portal da Matemática, quadriláteros, exercício 1)
Determine o valor de x no quadrilátero abaixo.



4) Como a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero é 360°, temos:



$$75° + 70° + 90° + (180° - x) = 360°$$

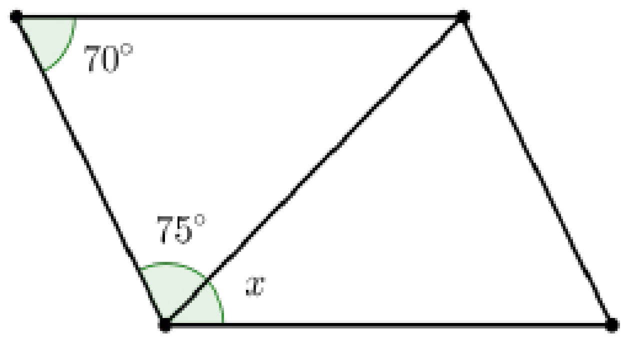
$$180° - x = 360° - 125°$$

$$-x = 235° - 180°$$

$$-x = -55°$$

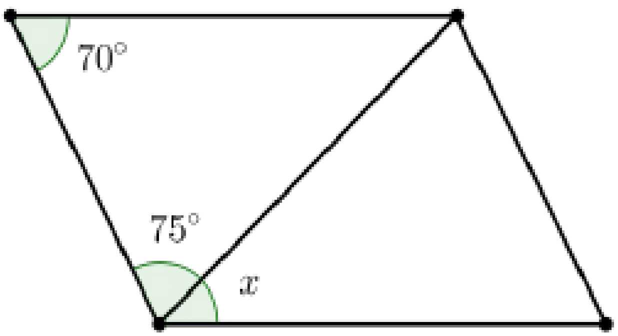
$$x = 55°$$

5. (Portal da Matemática, quadriláteros, exercício 4)
Calcule o valor de x no paralelogramo abaixo.



5) Dois ângulos consecutivos quaisquer de um paralelogramo são suplementares.

Sendo assim, temos que

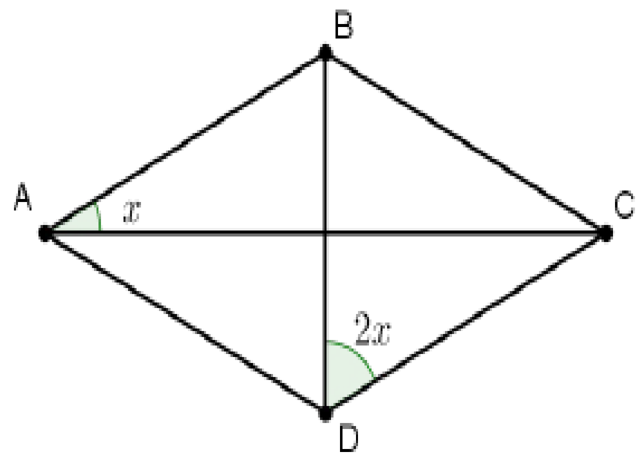


$$70° + 75° + x = 180°$$

$$x = 180° - 145°$$

$$x = 35°$$

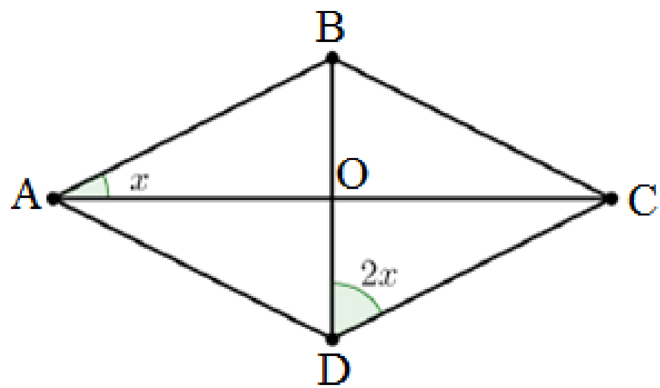
6. (Portal da Matemática, quadriláteros, Exercício 5)
Calcule o valor de x no losango abaixo.



6) Como os lados opostos do losango são paralelos, $< BAC \equiv < \ DCA$

Além disso, as diagonais são perpendiculares.

Chamando essa intersecção das diagonais de O.



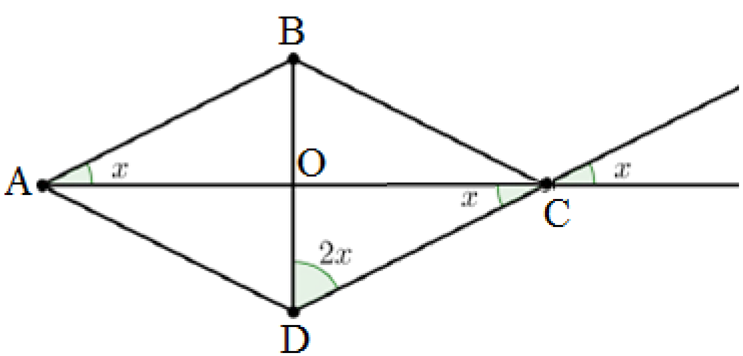
Temos, pela soma dos ângulos internos de do ΔDCO:

$$x + 2x + 90° = 180°$$

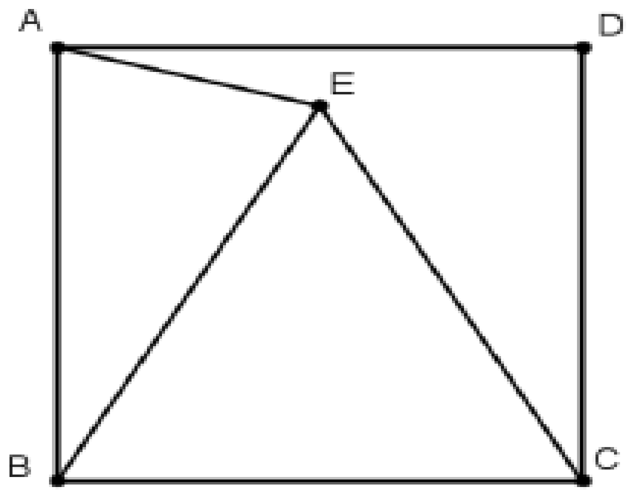
$$3x = 270°$$

$$x = \frac{270°}{3}$$

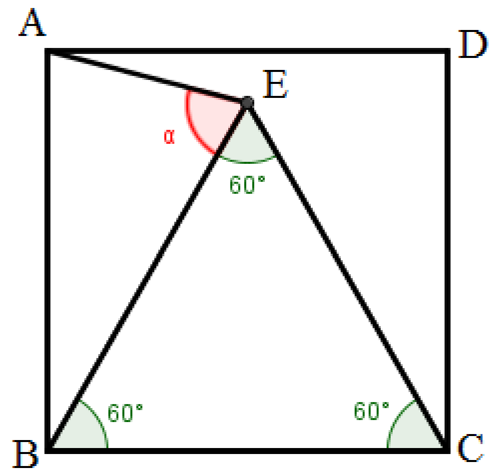
$$x = 90°$$



7. (Portal da Matemática, quadriláteros, Exercício 10) Determine a medida do ângulo AÊB no quadrado ABCD abaixo, sabendo que o triângulo BCE é equilátero.



7) Primeiramente observe que como o ΔEBC é equilátero seus ângulos internos são iguais a 60°.



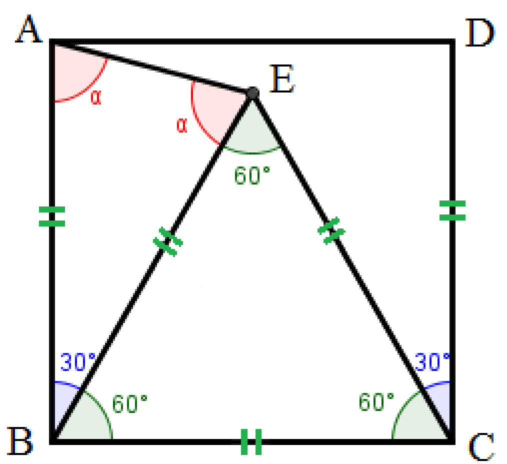
Então o ângulo $ABE = 30°$, pois $ABCD$ é um Quadrado.

Além disso,

$$BE = BC = AB$$

Então o ΔABE é isósceles sendo

$$< BAE =< AEB$$



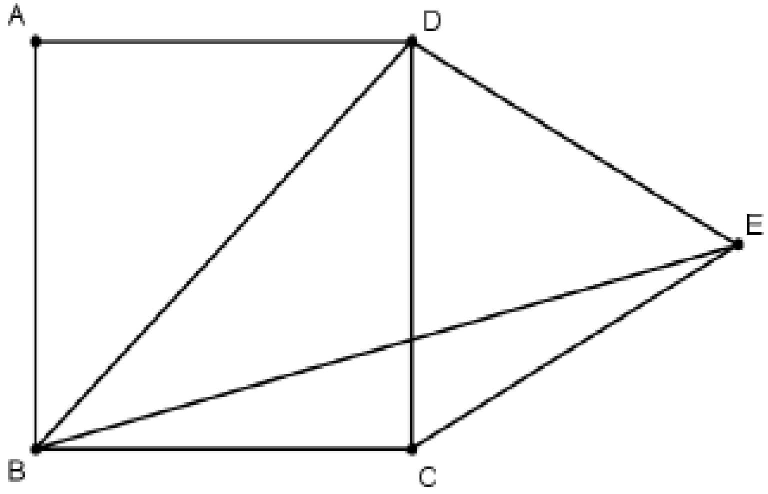
$$\alpha + \alpha + 30° = 180°$$

$$2\alpha = 150°$$

$$\alpha = \frac{150°}{2}$$

$$\alpha = 75°$$

8. (Portal da Matemática, quadriláteros, Exercício 11) O quadrilátero ABCD, da figura abaixo, é quadrado e o triângulo DCE é equilátero. Determine a medida do ângulo E do triângulo DBE.



8) Primeiramente observe que como o ΔCDE é equilátero seus ângulos internos medem 60°. E como o lado DC é comum ao lado do quadrado, temos que os lados

$$\boldsymbol{AB = BC = CD = DA = DE = CE}$$

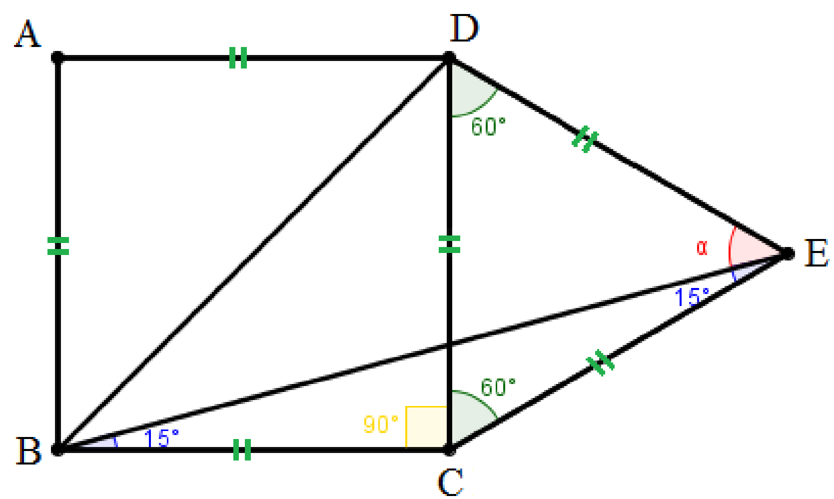
Assim, ΔBCE é isósceles

com $< CBE =< CEB$

Note que

$< BCE = 90° + 60° = 150°$

Pois $< BCD = 90°$ *(ângulo do quadrado)*



Assim,
$\beta + \beta + 150° = 180° \Rightarrow \ 2\beta = 30°$

$$\beta = 15°$$

Observe que $\alpha = 60° - \beta \quad \Rightarrow \quad \alpha = 60° - 15° \quad \Rightarrow \quad \alpha = 45°$

9. (BQ2015, pg 42 – Quadriláteros com todos os lados iguais não são congruentes) Um erro que muitos alunos cometem é pensar que dois quadriláteros são congruentes se tiverem os seus respectivos lados iguais. Isso não é verdade. Nesse problema, veremos que quadriláteros podem ter lados correspondentes iguais, mas áreas distintas.

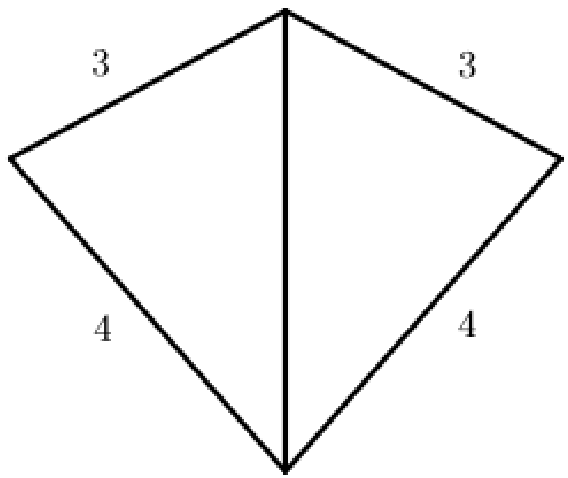
a) Mostre que a maior área possível para um quadrilátero que possui dois lados de comprimento 3 e dois de comprimento 4 é 12.

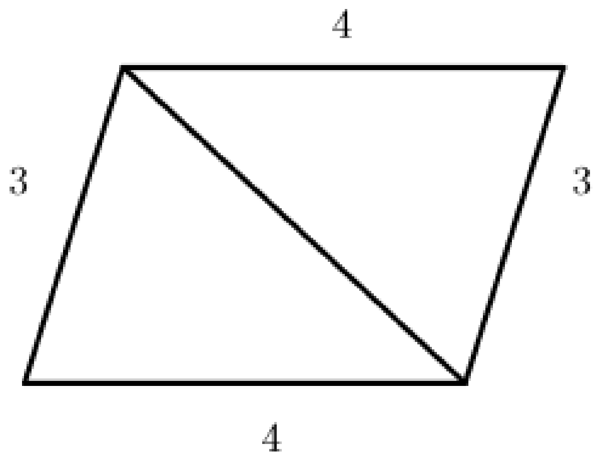
b) Mostre que, nos quadriláteros em que isso acontece, a soma dos ângulos opostos é 180°.

9)

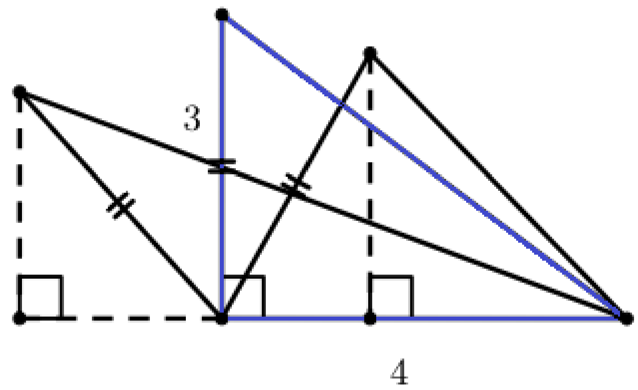
a) Existem dois modos de montar o quadrilátero com pares de lados iguais: ou eles ficam juntos ou ficam separados.

Nos dois casos, o quadrilátero pode ser dividido em dois triângulos que serão congruentes pelo caso (LLL).





Fixando o lado de comprimento 4 e variando o lado de comprimento 3, observe:



Como a base de comprimento 4 está fixa, a maior área possível será quando tivermos a maior altura possível a tal lado, e isso ocorre quando o lado de comprimento 3 for perpendicular a essa base.

Qualquer altura diferente de 3 seria cateto de um triângulo retângulo de hipotenusa 3, e consequentemente menor que 3.

Portanto, a maior área para cada triângulo é $\frac{3 \cdot 4}{2} = 6$

Dado que cada quadrilátero possui 2 destes triângulos, sua área máxima é $6 + 6 = 12$

b)

Veja que a área máxima ocorre quando os triângulos formados são

retângulos.

Assim, a soma de ângulos opostos retos é

$$90° + 90° = 180°$$

Como a soma dos ângulos internos do quadrilátero é 360°

Temos que os outros dois ângulos também devem somar 180°.