SIMULADO

Nível 3
Ensino Médio

OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS
OBMEP
Somando novos talentos para o Brasil

Nome completo do aluno

Endereço completo do aluno (Rua, Av., nº)

Complemento (casa, apartamento, bloco) **Bairro**

Cidade **UF** **CEP**

Endereço eletrônico (email) **DDD** **Telefone**

Assinatura **DDD** **Telefone (outro)**

Preencha e confira os dados acima com muita atenção!

Visite nossas páginas na Internet: *www.obmep.org.br* *www.facebook.com/obmep*

INSTRUÇÕES

1. Verifique se os dados da etiqueta desta prova estão corretos. Caso as informações não estejam corretas, comunique o erro ao aplicador imediatamente.
2. Preencha cuidadosamente todos os seus dados no quadro acima. Utilize letra de forma, colocando uma letra/dígito em cada quadradinho e deixando um espaço em branco entre cada palavra.
3. Lembre-se de assinar o quadro acima e a lista de presença.
4. A prova pode ser feita a lápis ou a caneta.
5. A duração da prova é de 3 horas. Você só poderá deixar a sala de prova 45 minutos após o início da prova. Ao terminar a prova, entregue-a ao aplicador.
6. A solução de cada questão deve ser escrita na página reservada para ela, de maneira organizada e legível. Evite escrever as soluções na folha de rascunho.
7. Na correção serão considerados todos os raciocínios que você apresentar. Tente resolver o maior número possível de itens de todas as questões.
8. Respostas sem justificativas não serão consideradas na correção.
9. Não escreva nos espaços sombreados.
10. Não é permitido:
    a. usar instrumentos de desenho, calculadoras ou qualquer fonte de consulta;
    b. comunicar-se com outras pessoas, além do aplicador de provas;
    c. usar quaisquer aparelhos eletrônicos (celulares, *tablets*, relógios com calculadora, máquinas fotográficas, etc.).

    O não cumprimento dessas regras resultará em sua desclassificação.

Boa prova!

	1	2	3	4	5	6	Total
Correção Regional	Correção Regional	Correção Regional	Correção Regional	Correção Regional	Correção Regional	Correção Regional	Correção Regional
Correção Nacional	Correção Nacional	Correção Nacional	Correção Nacional	Correção Nacional	Correção Nacional	Correção Nacional	Correção Nacional

(1) O quadrado da figura I é chamado *especial* porque

1. ele está dividido em 16 quadrados iguais;
2. em cada linha e em cada coluna aparecem os algarismos 1, 2, 3 e 4;
3. em cada um dos quadrados *A*, *B*, *C* e *D* (como na figura II) aparecem os algarismos 1, 2, 3 e 4.

4	2	1	3
1	3	2	4
3	1	4	2
2	4	3	1

I

A	*B*
C	*D*

II

(a) Complete o quadrado abaixo de modo que ele se torne especial.

	2		
3	4		
		1	
			2

(b) É possível completar o quadrado abaixo de modo a obter um quadrado especial? Por quê?

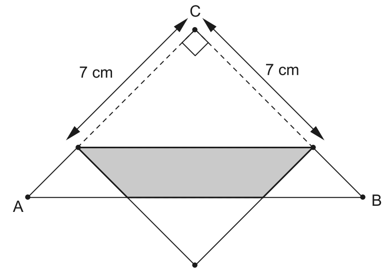
1	2		
3	4		
			2
			1

(c) Exiba todas as maneiras de completar o quadrado abaixo de modo a obter um quadrado especial.

1	2		
3	4		
			1

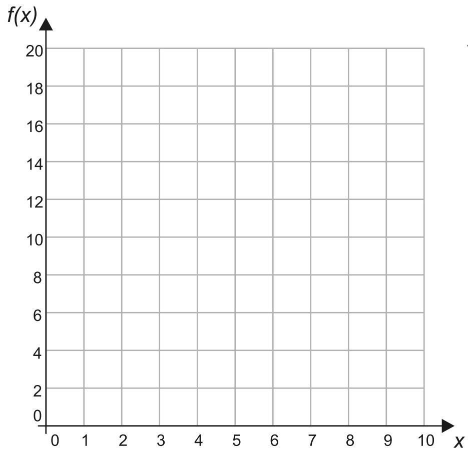
(d) Quantos quadrados especiais existem?

(2) A figura mostra um triângulo de papel *ABC*, retângulo em *C* e cujos catetos medem 10 cm. Para cada número *x* tal que $0 \leq x \leq 10$, marcam-se nos catetos os pontos que distam *x* cm do ponto *C* e dobra-se o triângulo ao longo da reta determinada por esses pontos. Indicamos por $f(x)$ a área, em cm², da região onde ocorre sobreposição de papel. Por exemplo, na figura ao lado a área da região cinzenta, em cm², é $f(7)$.



a) Calcule $f(2)$, $f(5)$ e $f(7)$.

b) Escreva as expressões de $f(x)$ para $0 \leq x \leq 5$ e $5 \leq x \leq 10$.



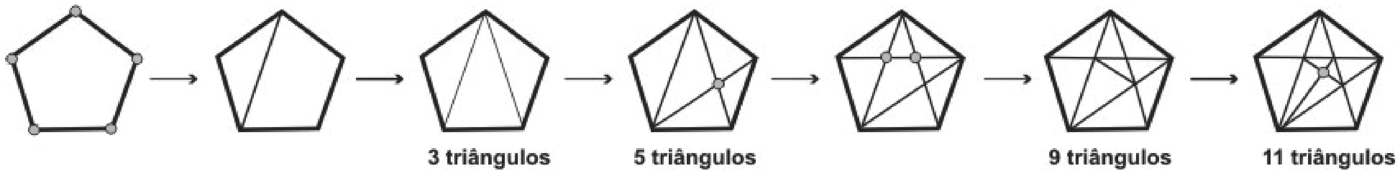
c) Faça o gráfico de $f(x)$ em função de *x*.

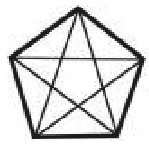
d) Determine o maior valor possível para a área da região de sobreposição.

(3) Dado um pentágono regular, dizemos que um ponto é *legal* quando:

- ele é um dos vértices do pentágono, ou
- ele é a interseção de segmentos cujos extremos são pontos legais; esses segmentos são chamados *segmentos legais*.

A figura mostra como *triangular legalmente* (isto é, decompor em partes triangulares usando **somente** segmentos legais) um pentágono em 3, 5, 9 e 11 triângulos. Os pequenos círculos indicam os pontos legais que aparecem a cada etapa. Note que a decomposição na quinta etapa **não** é uma triangulação legal, pois uma de suas partes é um quadrilátero.





(a) Desenhe uma triangulação legal do pentágono em 7 triângulos.

(b) Mostre como triangular legalmente o pentágono em qualquer número ímpar (maior que 1) de triângulos (a figura ao lado pode ajudar).

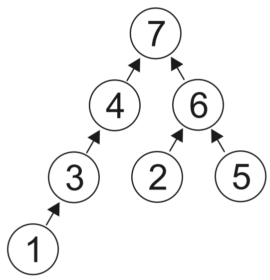
(c) Mostre que não é possível triangular legalmente o pentágono em um número par de triângulos.

(a)

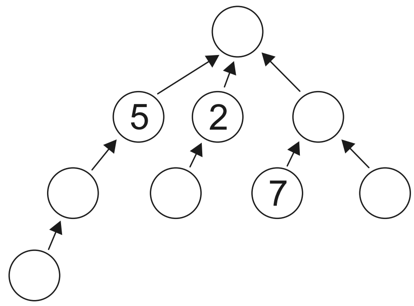
(b)

(c)

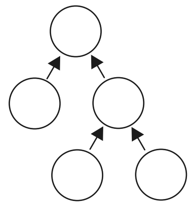
(4) Os círculos da figura abaixo foram preenchidos com os números de 1 a 7, de modo que todas as flechas apontam de um número menor para um maior. Neste caso, dizemos que a figura foi *bem preenchida*.



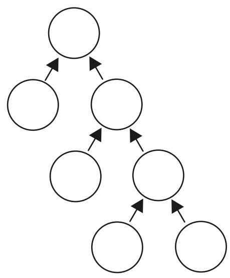
(a) Complete a figura abaixo com os números de 1 a 9 de modo que ela fique bem preenchida.



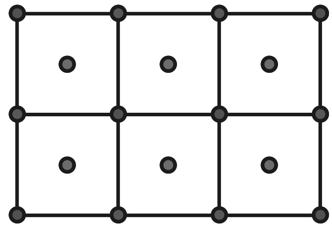
(b) De quantas maneiras a figura ao lado pode ser bem preenchida com os números de 1 a 5?



(c) De quantas maneiras a figura ao lado pode ser bem preenchida com os números de 1 a 7?



(5) Uma empresa fabrica painéis luminosos retangulares divididos em quadrados de 1 metro de lado. No centro de cada quadrado é colocada uma lâmpada vermelha e nos vértices dos quadrados são colocadas lâmpadas azuis. A figura ao lado mostra que um painel de 2 metros por 3 metros tem 6 lâmpadas vermelhas e 12 azuis, das quais 10 estão em sua borda.

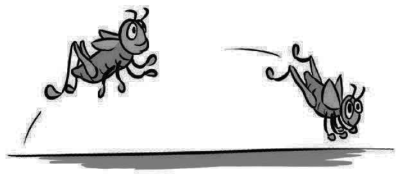


a) Quantas lâmpadas vermelhas há em um painel de 5 metros por 8 metros?

b) Quantas lâmpadas azuis há em um painel de 5 metros por 8 metros?

c) Quantas lâmpadas estão na borda de um painel no qual foram colocadas 72 lâmpadas vermelhas e 90 azuis?

(6) Dois grilos, Adonis e Basílio, pulam sempre para a frente; Adonis só dá pulos de 1 cm ou 8 cm e Basílio só dá pulos de 1 cm ou 7 cm. Eles percorrem qualquer distância com o menor número de pulos possível. Por exemplo, Adonis percorre 16 cm com apenas dois pulos de 8 cm cada, enquanto Basílio precisa de quatro pulos, sendo dois de 7 cm e outros dois de 1 cm. Por outro lado, para percorrer 15 cm, Adonis precisa de oito pulos, sendo um de 8 cm e sete de 1 cm, enquanto Basílio precisa de apenas três pulos, sendo dois de 7 cm e um de 1 cm.



Indicando por $A(d)$ e $B(d)$, respectivamente, o número de pulos que Adonis e Basílio dão para percorrer d centímetros, temos $A(15) = 8$, $B(15) = 3$, $A(16) = 2$ e $B(16) = 4$.

a) Complete a tabela abaixo.

d: distância em cm	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
A(d): número de pulos de Adonis	1	2													8	2
B(d): número de pulos de Basílio	1	2													3	4

b) Encontre um número d entre 200 e 240 tal que $B(d) < A(d)$ (isto é, encontre uma distância entre 200 cm e 240 cm tal que, para percorrê-la, Basílio dá menos pulos do que Adonis).

c) Encontre o maior número d tal que $B(d) = A(d)$.

RASCUNHO