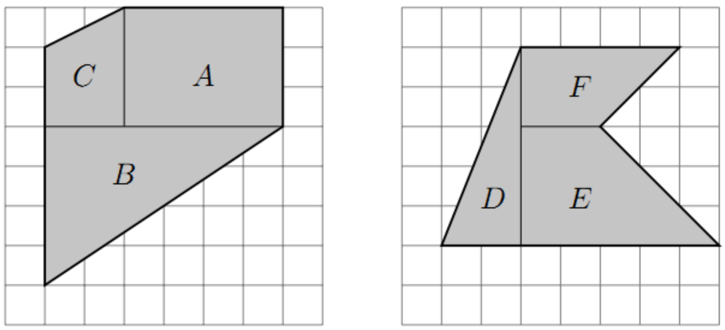
RESOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS

Exercício 1: Na figura a seguir, apresentamos uma possível decomposição das figuras dadas em triângulos, retângulos e trapézios. A figura da esquerda está decomposta em um retângulo A de



lados 3 e 4; um triângulo retângulo B de catetos 6 e 4 e um trapézio C de bases 2 e 3 e de altura 2. Portanto, as áreas são:

$$\text{área}(A) = 3 \times 4 = 12$$
$$\text{área}(B) = \frac{6 \times 4}{2} = 12$$
$$\text{área}(C) = \frac{(2+3) \times 2}{2} = 5$$

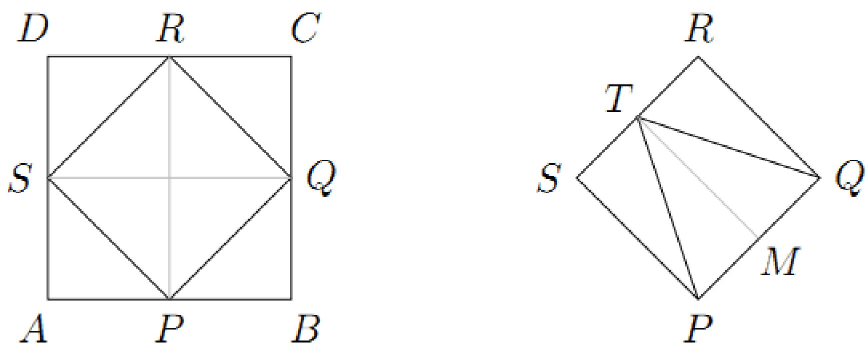
Deste modo, a área da figura da esquerda é $12 + 12 + 5 = 29$.

A figura da direita está decomposta em um triângulo retângulo D de catetos 2 e 5; um trapézio E de bases 2 e 5 e de altura 3; e um trapézio F de bases 2 e 4 e de altura 2. As áreas destas figuras são:

$$\text{área}(D) = \frac{2 \times 5}{2} = 5$$
$$\text{área}(E) = \frac{(2+5) \times 3}{2} = 10,5$$
$$\text{área}(F) = \frac{(2+4) \times 2}{2} = 6$$

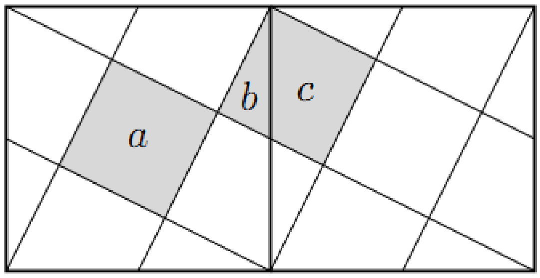
Portanto, a área da figura da direita é igual a $5 + 10,5 + 6 = 21;5$.

Exercício 2 (OBMEP 2009):



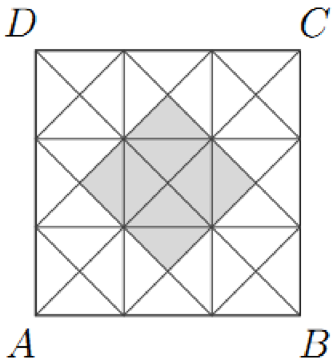
Traçando os segmentos $\overline{QS}$ e $\overline{PR}$, vemos que o quadrado $ABCD$ é composto de oito triângulos retângulos iguais e que o quadrado $PQRS$ é formado por quatro destes triângulos. Portanto, a área do quadrado $PQRS$ é a metade da área do quadrado $ABCD$, ou seja, $\frac{40}{2} = 20cm^2$. Traçando agora o segmento $\overline{TM}$, sendo M o ponto médio de $\overline{PQ}$, vemos que o quadrado $PQRS$ é composto de quatro triângulos retângulos iguais e o triângulo PQT é formado por dois destes triângulos. Logo, área do triângulo PQT é a metade da área do quadrado $PQRS$, ou seja, $\frac{20}{2} = 10cm^2$.

Exercício 3:



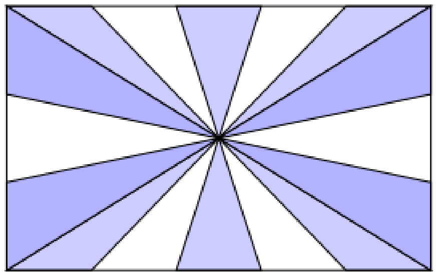
O quadrado $ABCD$ está dividido em um quadrado a, quatro triângulos retângulos b e quatro trapézios c. Reproduzindo a figura dada ao lado dela mesma, pode-se concluir que um triâgulo retângulo b e um trapézio c formam juntos um quadrado a. Isto é, $a = b + c$. Assim vemos que o quadrado $ABCD$ está dividido em regiões que podem ser reorganizadas para formarem 5 quadrados a. Portanto, a área do quadrado a é igual a um quinto da área do quadrado $ABCD$ e, portanto, a área do quadrado a é igual a $\frac{10 \times 10}{5} = 20$.

Exercício 4:

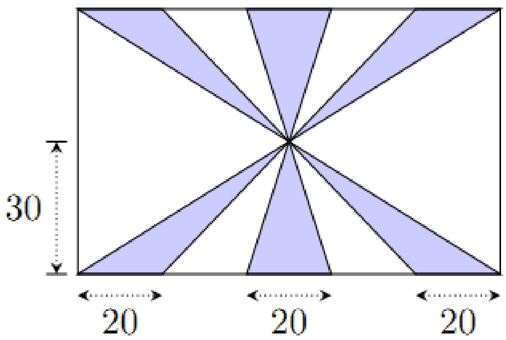


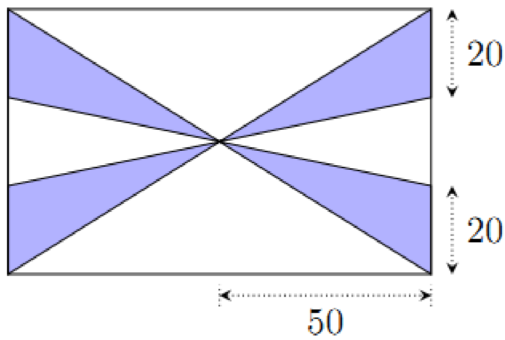
Desenhando vários segmentos de reta como está indicado na figura acima, podemos dividir o quadrado $ABCD$ em 36 triângulos iguais. A área de cada um destes triângulos é igual a área do quadrado $ABCD$ dividida por 36, ou seja, $\frac{18 \times 18}{36} = 9$. Como o quadrado sombreado é formado por 8 destes triângulos, a sua área é igual a $8 \times 9 = 72$.

Exercício 5 (Banco de Questões 2011): As diagonais do retângulo dividem as regiões pintadas do tecido em dois tipos de triângulos como na figura abaixo.



Todos os seis triângulos da figura seguinte, à esquerda, possuem base de 20 cm e altura de 30cm. Portanto, eles possuem mesma área igual a $\dfrac{20 \times 30}{2} = 300cm^2$.
Todos os quatro triângulos da figura seguinte, à direita, possuem a mesma área, pois eles têm base de 20cm e altura de 50cm. Logo cada um deles tem área igual a $\dfrac{20 \times 50}{2} = 500cm^2$.





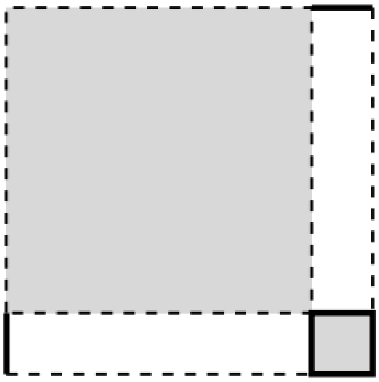
Portanto, a área total pintada no tecido é igual a $6 \times 300 + 4 \times 500 = 3800cm^2$.

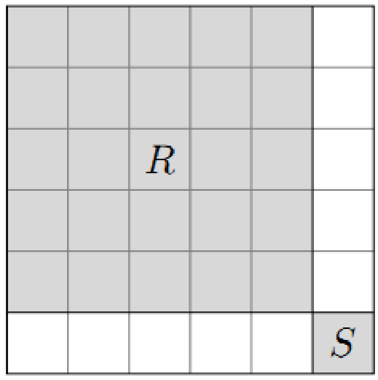
Exercício 6 (OBMEP 2010):

(A) Primeiramente vamos lembrar que a área de um retângulo pode ser calculada como o produto dos comprimentos de dois lados adjacentes. No problema, como a área do retângulo é $108cm^2$ e um lado mede 12cm, o comprimento do lado adjacente, deve ser um número que multiplicado por 12 tenha como resultado 108, ou seja, é $108 \div 12 = 9$. Assim, o perímetro do retângulo é $12 + 12 + 9 + 9 = 42cm$.

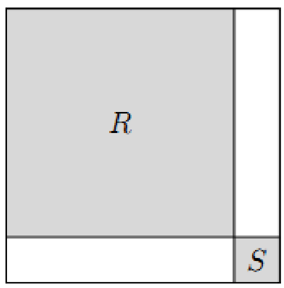
(B) Como o quadrado cinza tem área igual a $36cm^2$, o comprimento de seu lado é um número cujo quadrado é 36, ou seja, é igual 6cm. Logo o retângulo maior tem um lado de comprimento 6cm; como sua área é $108cm^2$, segue que seu outro lado mede $108 \div 6 = 18cm$. Logo um lado do retângulo branco mede 6cm e o outro mede $18 - 6 = 12cm$, e assim seu perímetro é $12 + 12 + 6 + 6 = 36cm$.

(C)





Na figura acima, marcamos os lados do quadrado R em pontilhado e os lados do quadrado S em traço mais grosso. Para simplificar, vamos nos referir ao comprimento de um segmento grosso apenas como *grosso*, e do mesmo modo para *pontilhado*. O perímetro do quadrado S é igual a quatro grossos. Observamos que os retângulos brancos são iguais, pois têm os mesmos lados, e seu perímetro é igual a dois grossos mais dois pontilhados. Por outro lado, o enunciado diz que o perímetro de um destes retângulos é igual a três vezes o perímetro de S, isto é, igual a doze grossos. Logo, os dois pontilhados devem ser iguais a dez grossos, ou seja, cada pontilhado é igual a cinco grossos.
Notamos agora que um lado do quadrado grande é igual a um grosso mais um pontilhado, ou seja, é igual a seis grossos. Podemos então decompor o quadrado grande em $6 \times 6 = 36$ quadradinhos iguais ao quadrado S, como na figura acima. Como a área do quadrado maior é igual a $108cm^2$, a área de um destes quadradinhos é igual a $108 \div 36 = 3cm^2$. Finalmente, o quadrado R consiste de $5 \times 5 = 25$ quadradinhos e então sua área á igual a $25 \times 3 = 75cm^2$.



Exercício 7 (OBMEP 2013) Notemos que a área do quadrilátero é a soma das áreas dos dois triângulos. Em ambos triângulos temos que a base vale $12cm$. Chamemos o triângulo maior de T_M e o triângulo menor de T_m. Consideremos a altura do triângulo maior como sendo x.

Assim, como o retângulo tem altura $10cm$ decorre que a altura do triângulo menor é $10 - x$. Daí, temos

$$\begin{aligned}\text{área (quadrilátero)}&= A_{(T_M)} + A_{(T_m)}\\ \text{área (quadrilátero)}&= \frac{12 \times x}{2} + \frac{12(10 - x)}{2}\\ \text{área (quadrilátero)}&= 6x + 60 - 6x = 60cm^2\end{aligned}$$

Exercício 8 (OBMEP 2013) Consideremos a área comum a ambos os quadrados como sendo S. Temos que S corresponde a 48% da área do quadrado menor. Consideremos x a medida do lado desse quadrado. Então,

$$S = \frac{48}{100} \times x^2$$

De modo análogo, temos que S corresponde a 27% da área do quadrado maior. Consideremos y como sendo a medida do lado deste quadrado. Então,

$$S = \frac{27}{100} \times y^2$$

Igualando ambas as expressões temos

$$\frac{48}{100} \times x^2 = \frac{27}{100} \times y^2$$

$$48x^2 = 27y^2$$

$$16x^2 = 9y^2$$

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{9}{16}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{3}{4}$$

Exercício 9 Para resolver esta questão calcularemos a área total do retângulo e excluiremos a área que não está na cor cinza.

Observe que a diagonal de qualquer quadradinho vale $1cm$. Assim, temos dois triângulos (das extremidades) que possuem base $1cm$ e altura $5cm$; dois triângulos (inferior e superior) que possuem base $2cm$ e altura $1cm$. A figura que reta pode ser dividida em dois triângulos: um com base $2cm$ e altura $1cm$ e outro com base $2cm$ a altura $2cm$. Assim, a área da figura procurada é dada por

$$A_F = 5 \times 4 - [2 \times \frac{5 \times 1}{2} + 3 \times \frac{2 \times 1}{2} + \frac{2 \times 2}{2}]$$
$$A_F = 20 - 5 - 3 - 2 = 10cm^2$$