Em seguida, na seção 3.5 são apresentados alguns exercícios contextualizados de aplicação dos conceitos de mdc e de mmc. Sugerimos que os professores trabalhem com os exercícios desta seção e com outros, caso seja necessário.

No Portal da Matemática, no 6º Ano do Ensino Fundamental, no Módulo “Divisibilidade”, na Aula “mdc e mmc” existem 37 exercícios resolvidos e existem dois materiais teóricos que podem ser adaptados para serem utilizados neste ciclo. Sugerimos que em algum momento da aula o professor apresente algum dos exercícios do Portal da Matemática. Além disso, sugerimos que os professores motivem os alunos a continuarem estudando em casa através da apostila, das videoaulas e dos exercícios resolvidos no Portal.

Contagem 5: resolução de exercícios

Desde a primeira aula de contagem estamos estudando o princípio multiplicativo e o princípio aditivo. Também estudamos o conceito de permutação e nas últimas aulas foram resolvidas algumas questões que já caíram em provas da OBMEP.

Uma preocupação sempre presente em problemas de contagem é saber se os alunos, no momento de utilizar o princípio multiplicativo, estão realmente sabendo o que estão fazendo ou se eles apenas estão multiplicando números que aparecem no enunciado da questão. Para contribuir para que os alunos entendam cada vez mais o princípio fundamental da contagem, sugerimos que este princípio seja evidenciado na resolução de todos os problemas que são resolvidos. Para alguns alunos, pode ser até importante retroceder um pouco e voltar a estudar exemplos mais simples. Nessa quinta aula de contagem novamente sugerimos que os professores trabalhem com resoluções de problemas. No que segue, apresentamos uma sugestão de problemas para esta aula, começando com problema bem simples para relembrar os conceitos, os princípios fundamentais de contagem.

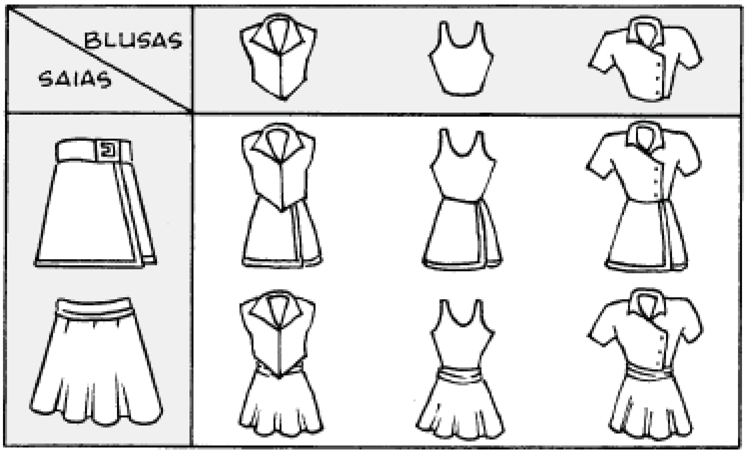
Exercício 1. Maria é muito indecisa. Ela pretende sair com suas amigas e está pensando em qual roupa vestir. Ela pode combinar três blusas diferentes com duas saias diferentes. De quantas maneiras diferentes Maria pode se vestir?

Solução: Vamos representar por S_1 e S_2 as duas saias de Maria. Podemos listar todas as combinações possíveis.

- Se ela escolheu a saia S_1, então ela pode se vestir de três modos diferentes, vestindo esta saia com cada uma das três blusas.

- De modo análogo, se ela escolheu a saia S_2, ela também pode se vestir de três modos diferentes, vestindo esta saia com cada uma das três blusas.

Então ao todo ela pode se vestir de 3+3=6 modos diferentes. Veja estas possibilidades na figura a seguir.



Comentário: A resposta 3+3=6 também pode ser escrita como $2\times3=6$. Neste caso podemos raciocinar assim. Para a escolha da saia temos 2 possibilidades. Uma vez escolhida a saia, temos 3 blusas para escolher. Então ao todo temos $2\times3=6$ pois temos uma soma de duas parcelas iguais a 3.

Exercício 2. Quantos são os números de dois algarismos distintos que podem ser formados com os dígitos 1, 2, 3 e 4?

Solução: Para resolver este problema podemos listar todas as possibilidades.

- Se o número começa com o algarismo 1 temos: 12, 13 e 14. São três possibilidades.
- Se o número começa com o algarismo 2 temos: 21, 23 e 24. São três possibilidades.
- Se o número começa com o algarismo 3 temos: 31, 32 e 34. São três possibilidades.
- Se o número começa com o algarismo 4 temos: 41, 42 e 43. São três possibilidades.

Então ao todo temos 3+3+3+3=12 números possíveis.

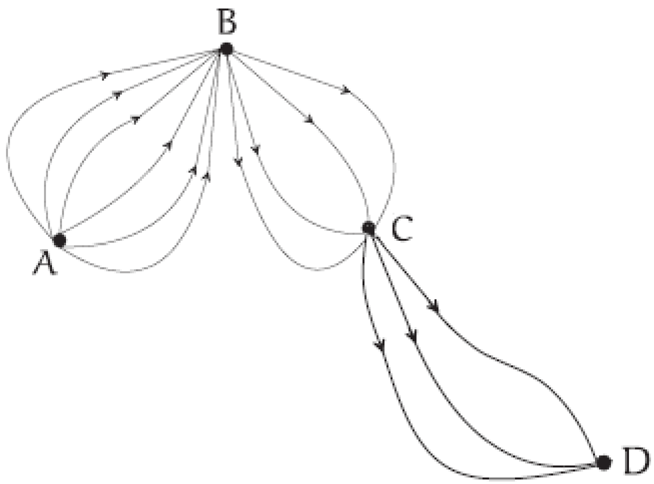
Comentário: Do jeito como a solução foi organizada, a contagem de todas estas possibilidades também pode ser pensada assim. Para a escolha do primeiro algarismo temos 4 possibilidade (são as quatro linhas destacadas na solução). Uma vez escolhido este primeiro algarismo, sobram 3 possibilidades para a escolha do algarismo seguinte (são as três possibilidades em cada linha da solução). Daí o total de possibilidades é igual ao produto $4\times3=12$ pois temos uma soma de 4 parcelas iguais a 3.

As resoluções destes dois primeiros exemplos são aplicações do princípio multiplicativo.

Princípio Multiplicativo: Se uma decisão D_1 pode ser tomada de p modos e, qualquer que seja esta escolha, a decisão D_2 pode ser tomada de q modos, então o número de maneiras de se tomarem consecutivamente as decisões D_1 e D_2 é igual ao produto pq.

O princípio multiplicativo pode ser generalizado para uma situação em que mais de duas decisões devem ser tomadas. Se escolhas diferentes de uma decisão não modificar a quantidade de escolhas de uma outra decisão, então para saber o número total de possibilidades basta multiplicar o número de escolhas de cada uma das decisões. Vejamos isto no exercício a seguir.

Exercício 3. Existem 6 estradas ligando as cidades A e B; existem 4 estradas ligando as cidades B e C; existem 3 estradas ligando as cidades C e D. De quantas maneiras é possível dirigir de A até D?



Solução: Para o trecho AB podemos escolher uma entre 6 estradas disponíveis. Uma vez escolhida esta estrada, para o trecho BC, temos 4 escolhas. Depois de escolhida esta estrada, temos 3 possibilidades para o trecho CD. Portanto temos $6 \times 4 \times 3 = 72$ modos diferentes de dirigir de A até D.

Exercício 4. Muitos bancos estão trocando senhas numéricas por senhas alfa-numéricas (formadas por letras). Se a senha é formada por 4 letras diferentes escolhidas em um alfabeto de 26 letras, de quantos modos diferentes uma pessoa pode formar a sua senha?

Solução: Para definir a sua senha, uma pessoa deve decidir qual é cada uma das letras da senha.

- A primeira letra da senha pode ser escolhida de 26 modos diferentes.
- Escolhida a primeira letra, sobram 25 letras para a segunda posição da senha.
- Se foram escolhidas a primeira e a segunda letra, sobram 24 letras para a terceira posição da senha.
- E se foram escolhidas as três primeiras letras, a última letra pode ser escolhida de 23 modos diferentes.

Portanto a senha pode ser formada de $26 \times 25 \times 24 \times 23 = 359\ 800$ modos diferentes.

Exercício 5. Considere as letras da palavra **HILBERT**.

- Quantos são os anagramas desta palavra?
- Quantos destes anagramas começam com uma vogal?
- Quantos anagramas possuem as letras HIL escritas sequencialmente nesta ordem?

Solução:

- Utilizando o conceito de permutação, uma palavra de 7 letras diferentes possui 7! anagramas, pois esta é a quantidade de permutações de 7 objetos diferentes.
- Começamos escolhendo a vogal. Como a palavra HILBERT possui duas vogais, existem duas possibilidades para escolher a vogal que vai começar o anagrama. Uma vez escolhida esta vogal, sobram 6 letras que podem ser permutadas a vontade. A quantidade de permutações destas 6 letras é igual a 6!. Portanto a quantidade de anagramas da palavra HILBERT que começam por vogal é igual a $2 \times 6!$.
- As letras HIL podem aparecer nas seguintes cinco posições do anagrama

  HILxxxx, xHILxxx, xxHILxx, xxxHILx ou xxxxHIL

  onde estamos indicando por "x" as demais letras que formarão o anagrama. Começamos então escolhendo uma destas 5 possibilidades. Feita esta escolha, para terminar o anagrama, escolhemos a ordem das outras 4 letras restantes. Sabemos que a quantidade de permutações de 4 letras diferentes é igual a 4!. Portanto, pelo Princípio Multiplicativo, a resposta deste item é igual a $5 \times 4!$.

Exercício 6. Quantos são os números de três algarismos distintos?

Solução: Vamos escolher, sucessivamente, os três algarismos, começando com o da esquerda. O primeiro algarismo pode ser escolhido de 9 modos, pois ele não pode ser igual a zero. O segundo algarismo pode ser escolhido de 9 modos, pois não pode ser igual ao primeiro algarismo. O terceiro algarismo pode ser escolhido de 8 modos, pois ele não pode ser igual nem ao primeiro nem ao segundo algarismo. A resposta é $9 \times 9 \times 8 = 648$.

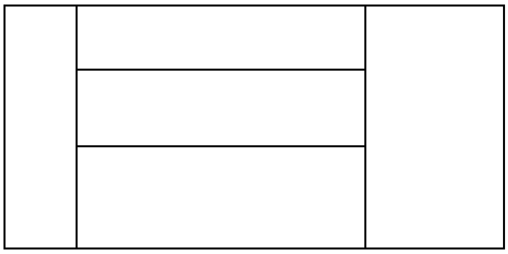
Exercício 7. (OBMEP 2005 - N2Q3 – 2ª fase) Na caixinha de costura de Lilavati só há botões de três cores: pretos, brancos e marrons. Os botões são de três tamanhos: pequenos, médios e grandes, e além disso são de duas formas: quadrados e redondos. Na caixinha não há botões pequenos redondos nem botões grandes pretos, e dos outros tipos há exatamente um botão de cada.

(A) Quantos botões brancos quadrados há na caixinha?
(B) Quantos botões há na caixinha?

Solução:

(A) Botões brancos quadrados distinguem-se pelo tamanho. Como só há um botão de cada tipo, segue que na caixinha de Lilavati há exatamente 3 botões brancos quadrados: um pequeno, um médio e um grande.
(B) Como são 3 possibilidades para tamanho, 2 possibilidades para a forma e 3 possibilidades para cor, segue que o número de possíveis tipos de botões é $3\times 2\times 3=18$. Por outro lado, como não há botões pequenos redondos (seriam 3, um para cada cor) nem botões grandes pretos (seriam 2, um para cada forma) e só há um botão de cada tipo, o total de botões na caixinha de Lilavati é $18-3-2=13$

Exercício 8. O retângulo a seguir está dividido em 5 regiões. Se temos 5 cores a nossa disposição, de quantas maneiras podemos colorir este retângulo de modo que cada região receba uma cor e regiões adjacentes sejam coloridas com cores diferentes?



Solução: Devemos considerar dois casos, analisando separadamente se as regiões da esquerda e da direita são coloridas da mesma cor ou com cores diferentes. Suponhamos então que as regiões da esquerda e da direta são coloridas com a mesma cor. Neste caso:

- A região da esquerda pode ser colorida com 5 cores.
- A região da direita pode ser colorida de uma única cor: a mesma cor da região da esquerda.
- A faixa horizontal de cima pode ser colorida com 4 cores, pois não podemos repetir a cor das regiões laterais.
- A faixa horizontal do meio pode ser colorida com 3 cores pois devemos evitar a cor das regiões laterais e a cor da faixa horizontal de cima.
- A faixa horizontal de baixo também pode ser colorida com 3 cores pois devemos evitar a cor das regiões laterais e a cor da faixa horizontal do meio.

Neste caso obtemos $5\times 1\times 4\times 3\times 3=180$ possibilidades.

Suponhamos agora que as regiões da esquerda e da direta são coloridas com cores diferentes. Neste caso:

- Existem 5 opções de cores para a região da esquerda.
- Em seguida existem 4 opções de cores para a região da direita, pois ela deve ser colorida com uma cor diferente da região da esquerda.
- Daí podemos colorir a faixa horizontal de cima com 3 cores, pois devemos evitar as duas cores das regiões laterais.
- Em seguida podemos colorir a faixa horizontal do meio com 2 cores, pois devemos evitar as duas cores das regiões laterais e a cor da faixa horizontal de cima.
- Finalmente a faixa horizontal de baixo também pode ser coloria com 2 cores pois devemos evitar as duas cores das regiões laterais e a cor da faixa horizontal do meio.

Neste caso obtemos $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 2 = 240$ possibilidades. Somando, concluímos que o retângulo pode ser colorido de $180 + 240 = 420$ maneiras diferentes.

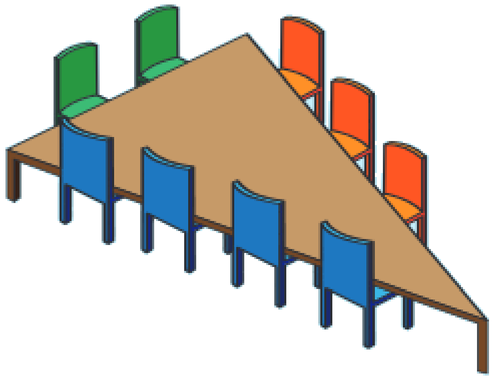
Exercício 9. Quantos são os números abc de três algarismos distintos tais que $a \in \{1,2,3,4,5\}$, $b \in \{1,2,3,4\}$ e $c \in \{1,2,3\}$.

Solução: Observe inicialmente que se começamos escolhendo o algarismo a logo enfrentamos uma dificuldade em contar quantas são as escolhas possíveis para o algarismo b . Então vamos mudar de estratégia, começando pelo algarismo c .

- O algarismo c pode ser escolhido de 3 maneiras diferentes.
- Após uma escolha do algarismo c, o algarismo b pode ser escolhido de 3 maneiras diferentes.
- E após serem escolhidos os algarismos b e c, podemos escolher o algarismo a de 3 maneiras diferentes.

Portanto podemos formar $3 \times 3 \times 3 = 27$ números.

Exercício 10. (OBMEP 2012 – N3Q18 – 1ª fase) Seis amigos, entre eles Alice e Bernardo, vão jantar em uma mesa triangular, cujos lados têm 2, 3 e 4 lugares, como na figura. De quantas maneiras esses amigos podem sentar-se à mesa de modo que Alice e Bernardo fiquem juntos e em um mesmo lado da mesa?



Solução: Há 6 possibilidades para escolher dois lugares juntos no mesmo lado da mesa: 1 no lado com 2 lugares, 2 no lado com 3 lugares e 3 no lado com 4 lugares. Uma vez escolhida uma dessas possibilidades, Alice e Bernardo podem se sentar de duas maneiras diferentes nesses lugares. Os quatro amigos que ainda estão em pé podem se sentar nos 7 lugares vazios de $7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$ maneiras diferentes. No total, os amigos podem se sentar-se à mesa de $6 \times 2 \times 840 = 10\,080$ maneiras diferentes.

Exercício 11. (OBMEP 2008 - N2Q20 – 1ª fase) As peças da figura 1 são feitas de quadradinhos de cartolina cinza de um lado e branca do outro. A figura 3 mostra uma maneira de encaixar essas peças com o lado cinza para cima nos quatro quadrados da figura 2. De quantas maneiras diferentes é possível fazer isso?

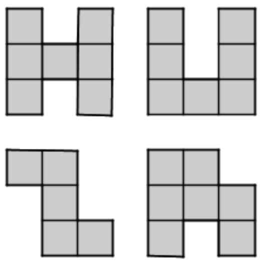


Figura 1

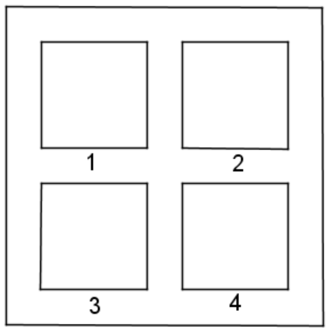


Figura 2

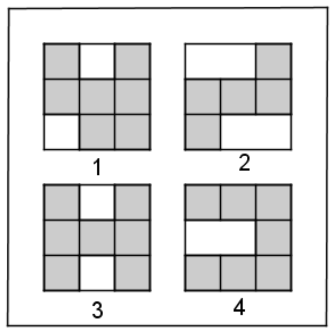
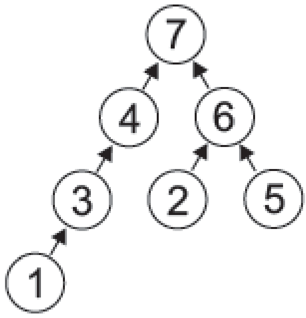
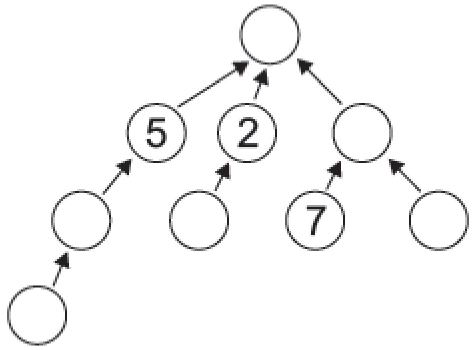


Figura 3

Solução: Vamos denotar as peças, da esquerda para a direita e de cima para baixo, de H, U, Z e R. A peça H só pode ser colocada de 2 maneiras diferentes em um quadrado, a peça U de 4 maneiras diferentes, a peça Z de 2 maneiras diferentes e a peça R de 4 maneiras diferentes. Uma vez fixada a posição em que as peças vão entrar nos quadrados, elas podem ser distribuídas de $4! = 4 \times 3 \times 3 \times 1 = 24$ maneiras diferentes. Logo o número de maneiras diferentes de colocar as peças nos quadrados é $2 \times 4 \times 2 \times 4 \times 24 = 1536$.

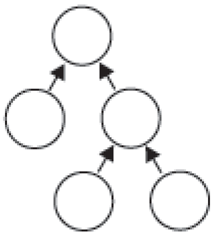
Exercício 12. (OBMEP 2008 - N1Q5 – 2ª fase) Os círculos da figura abaixo a esquerda foram preenchidos com os números de 1 a 7, de modo que todas as flechas apontam de um número menor para um maior. Neste caso, dizemos que a figura foi bem preenchida.



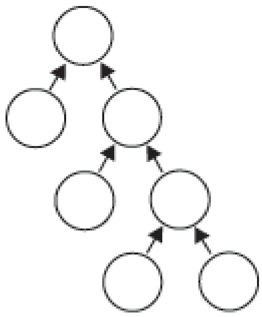


(A) Complete a figura acima a direita com os números de 1 a 9 de modo que ela fique bem preenchida.

(B) De quantas maneiras a figura a seguir pode ser bem preenchida com os números de 1 a 5?



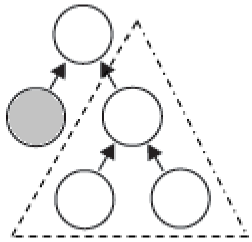
(C) De quantas maneiras a figura a seguir pode ser bem preenchida com os números de 1 a 7?

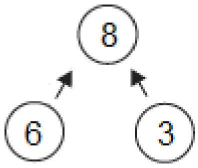


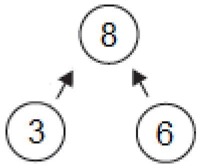
Solução:

(A) Só existe uma maneira de preencher o diagrama, como mostramos a seguir.
- O número 9 não pode ficar abaixo de nenhum número, logo deve ficar no topo.
- Acima do número 7 só podemos colocar o 9 e 8. Como o 9 já está no topo, o 8 ficará acima do 7.
- O número 6 não pode ficar abaixo do 5 nem do 2, logo ficará abaixo do 8 , ao lado do 7.
- O número 1 é o único que pode ficar abaixo do 2.
- Os números 3 e 4 devem ficar abaixo do 5, com o 3 debaixo do 4.

(B) 1ª solução: Primeiro vamos examinar o diagrama menor de três bolinhas marcadas pelo triângulo pontilhado, à direita. Para que ele fique bem preenchido com quaisquer três números positivos distintos, o maior número deve ficar no topo e os outros dois poderão ser colocados nos dois círculos de baixo de 2 maneiras diferentes. Por exemplo, se os números forem 3, 6 e 8, podemos dispô-los das 2 maneiras ilustradas a seguir.







Para que o diagrama completo do problema fique bem preenchido com os números de 1 a 5, o 5 deve ficar no topo. A casa sombreada pode ser preenchida com qualquer número de 1 a 4. As três casas restantes, marcadas com o triângulo pontilhado, formam o diagrama analisado acima e poderão então ser preenchidas de 2 maneiras, com os três números restantes. Resumindo, podemos preencher o diagrama do seguinte modo:

- preenchemos o círculo do topo com o 5: 1 possibilidade;
- preenchemos a casa sombreada com 1, 2, 3 ou 4 : 4 possibilidades;
- preenchemos as três casas que faltam com os três algarismos restantes: 2 possibilidades.

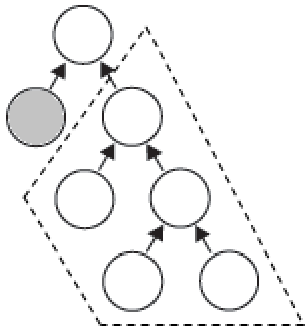
Logo o diagrama pode ser preenchido de $1\times 4\times 2 = 8$ maneiras diferentes. Notamos que este raciocínio se aplica para quaisquer cinco números positivos distintos. Isto será importante na resolução do próximo item.

(B) 2ª solução: Notamos primeiro que o 5 deve sempre ocupar a bolinha de cima. O 4 deve então ocupar uma das duas bolinhas abaixo do 5, e então

- se o 4 ocupar a bolinha sombreada, o 3 deve ocupar a outra bolinha abaixo do 5, e o 1 e o 2 podem ser colocados de duas maneiras diferentes nas duas bolinhas que sobram; temos duas possibilidades neste caso;
- se o 4 ocupar a outra bolinha abaixo do 5, a casa sombreada pode ser ocupada por qualquer dos números de 1 a 3, e os outros dois números podem ser colocados nas duas últimas bolinhas vazias; neste caso temos $3\times 2 = 6$ possibilidades.

Deste modo, o número de maneiras de preencher o diagrama é 2 + 6 = 8 .

(C) 1ª solução: Para que o diagrama fique bem preenchido com os números de 1 a 7, temos que colocar o 7 no topo. Na figura a seguir, a casa sombreada pode ser preenchida com qualquer número de 1 a 6. A parte circundada pela linha pontilhada foi analisada no item (B) e pode ser preenchida com os 5 números restantes de 8 formas diferentes. Ou seja, podemos preencher o diagrama como segue:



- preenchemos o círculo do topo com o 7: 1 possibilidade;
- preenchemos a casa sombreada com 1, 2, 3 , 4, 5 ou 6: 6 possibilidades;
- preenchemos a parte circundada com os algarismos restantes: 8 possibilidades.

Logo o diagrama pode ser preenchido de $1 \times 6 \times 8 = 48$ maneiras diferentes.

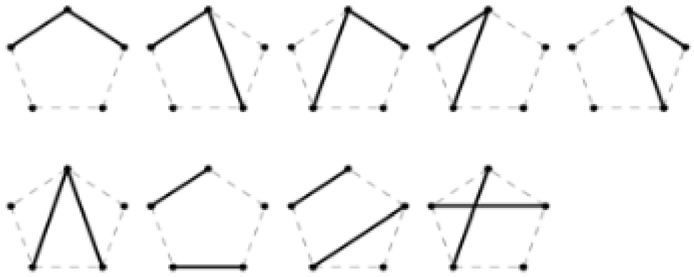
(C) 2ª solução: Notamos primeiro que o 7 deve sempre ocupar a bolinha de cima. O 6 deve então ocupar uma das duas bolinhas abaixo do 7, e então
- se o 6 ocupar a bolinha sombreada, os números de 1 a 5 devem ocupar as casas circundadas com a linha pontilhada. De acordo com o item (B), isto pode ser feito de 8 maneiras distintas.
- se o 6 deve ocupar a outra bolinha abaixo do 7, podemos colocar qualquer número de 1 a 5 na casa sombreada e distribuir os números restantes pelas quatro bolinhas ainda vazias, o que pode ser feito de 8 maneiras diferentes, de acordo com o item (B). Aqui temos $5 \times 8 = 40$ possibilidades.

Logo o diagrama pode ser preenchido de 8 + 40 = 48 maneiras diferentes.

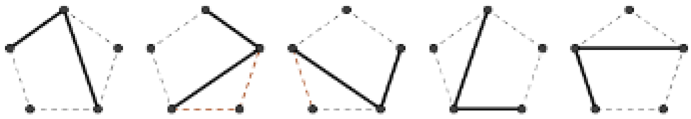
Exercício 13. (OBMEP 2009 - N2Q19 – 1ª fase) Com exatamente dois segmentos de reta, podemos fazer figuras diferentes unindo os vértices de um pentágono. Cinco dessas figuras estão ilustradas a seguir.

Incluindo essas cinco, quantas figuras diferentes podemos fazer desse modo?

Solução: Na figura abaixo mostramos as 9 figuras diferentes que contém o vértice superior do pentágono. Observamos que nenhuma destas figuras pode ser obtida a partir de outra através de rotações do pentágono.

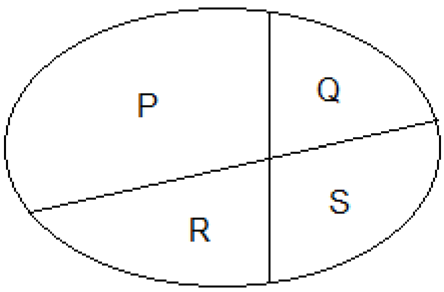


Cada uma destas figuras dá origem, através de rotações do pentágono, a outras 4 figuras diferentes, como ilustramos abaixo.



Segue que o número de figuras diferentes que podemos fazer com dois segmentos é $9 \times 5 = 45$.

Exercício 14. O mapa a seguir está dividido em 4 regiões P, Q, R e S. Dispomos de 4 cores e queremos colorir o mapa de modo que regiões que possuem uma linha de fronteira comum sejam coloridas com cores diferentes. De quantas maneiras é possível colorir o mapa?



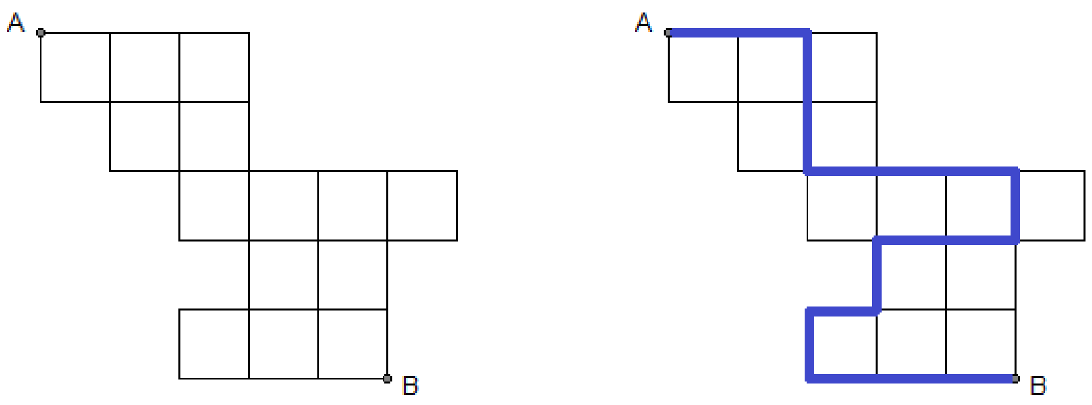
Solução: Para fazer a contagem desejada devemos considerar dois casos disjuntos: as regiões P e S podem ter cores iguais ou cores diferentes.

- Suponhamos que as regiões P e S sejam coloridas de cores diferentes. Neste caso existem 4 cores para a região P e existem 3 cores para a região S. Depois de coloridas as regiões P e S, existem duas escolhas de cores para a região Q pois não podem ser escolhidas as cores utilizadas em P e em S. E de modo análogo, existem duas escolhas de cores para a região R. Neste caso, o mapa pode ser colorido de $4 \times 3 \times 2 \times 2 = 48$ maneiras diferentes.

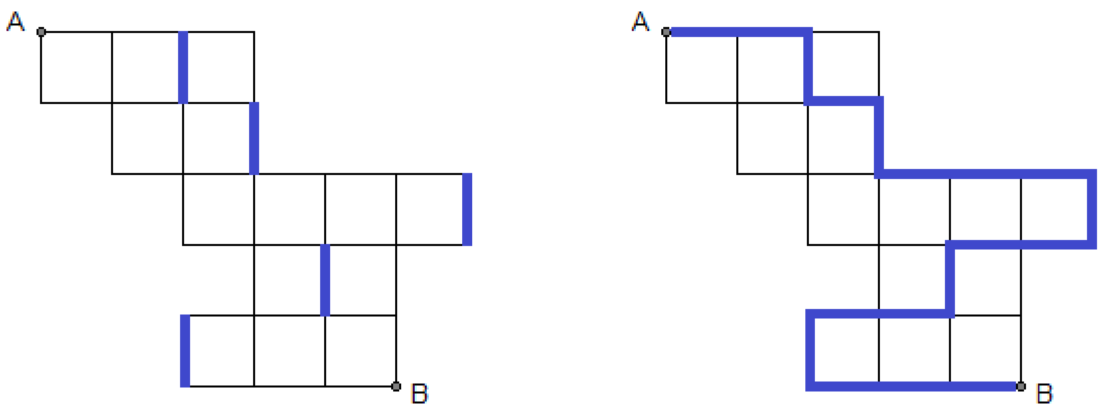
- Suponhamos agora que as regiões P e S sejam coloridas com uma única cor. Esta cor pode ser escolhida de 4 maneiras. Após as regiões P e S serem coloridas com uma mesma cor, podemos colorir a região Q de 3 cores diferentes e também podemos colorir a região R de 3 cores diferentes pois apenas precisamos evitar a cor utilizada em P e em S. Neste caso, o mapa pode ser colorido de $4 \times 1 \times 3 \times 3 = 36$ maneiras diferentes.

Somando as duas possibilidades, obtemos 48+36=84 possibilidades para colorir o mapa.

Exercício 15. (OBMEP 2007 - N3Q20 – 1ª fase) Na figura a seguir, uma formiguinha deseja sair do ponto A e chegar no ponto B, andando apenas sobre os segmentos desenhados. Ela só pode descer, ela pode ir para a esquerda ou para a direita, mas ela não pode passar duas vezes sobre um mesmo segmento. Na figura da direita está ilustrado um dos caminhos possíveis que a formiguinha pode percorrer. De quantas maneiras diferentes ela pode fazer um caminho permitido do ponto A ao ponto B?



Solução: Um caminho ligando os pontos A e B contém 5 segmentos verticais. Observe que se são escolhidos estes 5 segmentos verticais, o caminho fica completamente determinado.



O primeiro segmento vertical pode ser escolhido de 4 maneiras diferentes. O segundo segmento vertical pode ser escolhido de 3 maneiras diferentes, O terceiro, de 5 maneiras. O quarto, de 3 maneiras. E o quinto segmento vertical pode ser escolhido de 4 maneiras diferentes. Deste modo, podemos formar $4 \times 3 \times 5 \times 3 \times 4 = 720$ caminhos diferentes conectando os pontos A e B.

Estes dois últimos exercícios estão resolvidos no Portal da Matemática - 2º Ano do Ensino Médio – Módulo: “princípios básicos de contagem” – Aula: “princípio fundamental da contagem” – Videoaula:

- Exercícios sobre o Princípio Fundamental da Contagem – parte 2