(c) Mostre que se n é um número par, então $\text{mdc}(n, 2n+2) = 2$.

Problema 3.17. Sejam a e b dois números naturais não ambos nulos e seja $d = \text{mdc}(a, b)$. Se a' e b' são os dois números naturais tais que $a = a' \times d$ e $b = b' \times d$, mostre que $\text{mdc}(a', b') = 1$.

3.4 Algoritmo da Divisão

Uma das propriedades mais importantes dos números naturais é a possibilidade de dividir um número por outro com resto pequeno. Essa é a chamada *divisão euclidiana*.

Sejam dados dois números naturais a e b, com $a > 0$ e b qualquer. Queremos comparar o número natural b com os múltiplos do número a. Para isto, considere todos os intervalos da forma $[na, (n+1)a)$, para n um número natural qualquer. Isto nos dá uma partição de $\mathbb{N}$, ou seja,

$$\mathbb{N} = [0, a) \cup [a, 2a) \cup [2a, 3a) \cup \cdots \cup [na, (n+1)\,a) \cup \cdots$$

e os intervalos acima são dois a dois sem elementos em comum.

Portanto, o número b estará em um e apenas um dos intervalos acima. Digamos que b pertença ao intervalo

$$[qa, (q+1)\,a).$$

Logo, existem dois números naturais q e r, unicamente determinados, tais que

$$b = aq + r, \qquad \text{com} \quad 0 \leq r < a.$$

O número b é chamado *dividendo*, o número a *divisor*, os números q e r são chamados, respectivamente, *quociente* e *resto* da divisão de b por a.

Note que dados dois números naturais a e b, nem sempre b é múltiplo de a, este será o caso se, e somente se, $r = 0$.

Como determinar os números q e r na divisão euclidiana?

Caso $\mathbf{b < a}$ Como $b = 0 \times a + b$, temos que $q = 0$ e $r = b$.

Caso $\mathbf{b = a}$ Neste caso, tomamos $q = 1$ e $r = 0$.

Caso $\mathbf{b > a}$ Podemos considerar a sequência:

$$b - a,\ b - 2a, \ldots,\ b - na,$$

até encontrar um número natural q tal que $b - (q+1)a < 0$, com $b - qa \geq 0$. Assim, obtemos $b = qa + r$, onde $r = b - qa$ e, portanto, $0 \leq r < a$.

Por exemplo, para dividir o número 54 por 13, determinamos os resultados da subtração de 54 pelos múltiplos de 13:

$$
\begin{aligned}
&54 - 13 = 41,\\
&54 - 2 \times 13 = 28,\\
&54 - 3 \times 13 = 15,\\
&54 - 4 \times 13 = 2\\
&54 - 5 \times 13 = -11 < 0.
\end{aligned}
$$

Assim, a divisão euclidiana de 54 por 13 se expressa como:

$$54 = 4 \times 13 + 2.$$

Problema 3.18. Efetue a divisão euclidiana nos seguintes casos:

(a) de 43 por 3 (b) de 43 por 5 (c) de 233 por 4

(d) de 1 453 por 10, por 100, por 1 000 e por 10 000.

Problema 3.19. Mostre o chamado *Algoritmo da Divisão Euclidiana* nos inteiros:

Dados inteiros a e b, com $a > 0$, existe um único par de inteiros q e r tal que

$$b = aq + r, \quad \text{com} \quad 0 \leq r < a.$$

SUGESTÃO: Considere os intervalos da forma $[na, (n+1)\,a)$, com n em $\mathbb{Z}$.

Problema 3.20. Efetue a divisão euclidiana nos seguintes casos:

(a) de -43 por 3 (b) de -43 por 5 (c) de -233 por 4

(d) de $-1\,453$ por 10, por 100, por 1 000 e por 10 000.

Pelo Problema 3.19, se $a > 0$, os possíveis restos da divisão de um