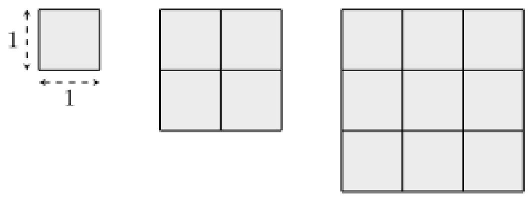
**Área: conceito e áreas do quadrado e do retângulo**

Dada uma figura no plano, vamos definir a área desta figuracomo o resultado da comparação da figura dada como uma certa unidade de medida. No caso do conceito de área de figuras planas, a unidade de medida utilizada é um quadrado de lado 1(uma unidade de comprimento). Assim um quadrado de lado 1 tem, por definição, uma unidade de área.

É muito provável que você já tenha aprendido que a área de um quadrado de lado $l$ é igual a $l^2$ e que a área de um retângulo de base $b$ e altura $h$ é igual ao produto $bh$ da base pela altura. Nesta seção pretendemos dar sentido a estas expressões, mostrando como podem ser calculadas as áreas de quadrados e retângulos em que os lados são dados por números naturais e por números racionais.

A figura a seguir mostra, respectivamente, quadrados de lado 1, lado 2 e lado 3. Por definição o quadrado de lado 1 tem uma unidade de área. Como o quadrado de lado 2 pode ser dividido em 4 quadrados de lado 1, dizemos que o quadrado de lado 2 tem área igual a 4. Do mesmo modo, como o quadrado de lado 3 pode ser dividido em 9 quadrados de lado 1, dizemos que o quadrado de lado 3 tem área igual a 9.



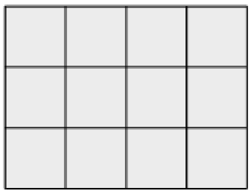

Generalizando, se um quadrado tem lado $n$, em que $n$ é um número inteiro positivo, então sua área é igual a $n^2$, pois dentro deste quadrado cabem exatamente $n^2$ quadrados de lado 1. Observe que neste cálculo utilizamos intuitivamente as seguintes propriedades do conceito de área:

- Figuras iguais possuem a mesma área.

- Se uma figura está dividida em duas figuras disjuntas, então a soma das áreas dessas duas figuras menores é igual à área da figura total.

Vejamos agora como calcular a área de um retângulo cujos lados são numeros inteiros. Por exemplo, o retângulo $1 \times n$ deve ter área $n$, pois ele é formado por $n$ quadrados unitários. O retângulo $2 \times n$ é formado por dois retângulos $1 \times n$. Assim sua área é $2n$. Procedendo desta forma, podemos chegar na expressão $nm$ para a área do retângulo $n \times m$. Exemplificando,o retângulo $3 \times 4$ da figura a seguir tem área igual a $3 \times 4 = 12$, pois ele é formado por 12 quadrados unitários, ou por 3 retângulos $1 \times 4$ (três faixas horizontais).

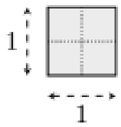
Antes de continuar vale a pena observar que a expressão $n^2$ para a área de um quadrado de lado $n$ é um caso particular da expressão $nm$ da área de um



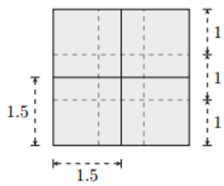
retângulo $n \times m$, pois, quando $n = m$, este retângulo também é um quadrado.

Até agora vimos que, através de uma simples contagem,é possível calcular as áreas de quadrados e retângulos cujos comprimentos dos lados são números inteiros. Mas e quando estes lados não são números inteiros, como calcular as áreas destas figuras? Bom, afirmamos que a expressão $n^2$ para a área de um quadrado de lado $n$ e a expressão $nm$ para a área de um retângulo de base $n$ e altura $m$ continuam válidas mesmo quando $n$ e $m$ não são números inteiros. Em vez de apresentar uma demonstração abstrata deste fato, vamos estudar comon ele pode ser verificado em alguns exemplos.

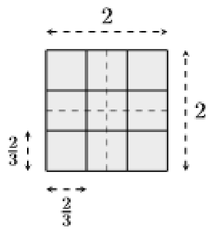
Por exemplo, na figura a seguir vemos que juntando 4 quadradinhos de lado $\frac{1}{2}$ obtemos um quadrado de lado 1 (nossa unidade de área). Isto significa que a área do quadradinho de lado $\frac{1}{2}$ é igual a $\frac{1}{4}$ da área do quadrado de lado 1. Como o quadrado de lado 1 tem área igual a 1, concluímos que a área do quadrado de lado $\frac{1}{2}$ é igual a $\frac{1}{4} = (\frac{1}{2})^2$.




Vejamos, agora, como podemos determinar a área do quadrado de lado $\frac{3}{2} = 1,5$. Na figura a seguir, vemos que juntando 4 quadradinhos de lado $1,5$ obtemos um quadrado de lado 3. Isto nos diz que a área do quadrado de lado $1,5$ é igual a $\frac{1}{4}$ da área do quadrado de lado 3. Como o quadrado de lado 3 tem área igual a $3^2 = 9$, concluímos que o quadradode lado $1,5$ tem área igual a $\frac{1}{4} \times 9 = \frac{9}{4} = (\frac{1}{2})^2$.



Como último exemplo, vejamos como determinar a área do quadrado de lado $\frac{2}{3}$. Para obter este quadrado, podemos dividir cada lado de um quadrado de lado 2 em três partes, dividindo assim o quadrado de lado 2 em 9 quadrados de lado$\frac{2}{3}$ (veja a figura a seguir). Esta divisãonos mostra que a área do quadrado de lado $\frac{2}{3}$ é igual a $\frac{1}{9}$ da área do quadrado de lado 2. Como o quadrado de lado 2 tem área igual a 4, concluímos que o quadrado de lado $\frac{2}{3}$ tem área igual a $\frac{1}{9} \times 4 = \frac{4}{9} = (\frac{2}{3})^2$.

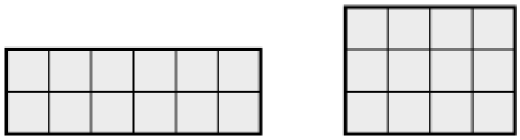



Resumindo os cálculos destes três exemplos:

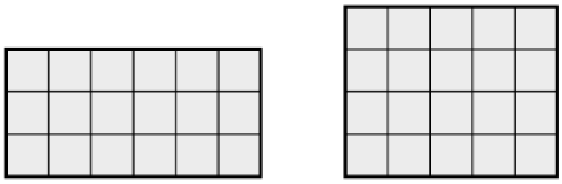
- O quadrado de lado $\frac{1}{2}$ tem área igual a$\frac{1}{4} = (\frac{1}{2})^2$.
- O quadrado de lado $\frac{3}{2}$ tem área igual a $\frac{9}{4} = (\frac{3}{2})^2$.
- O quadrado de lado $\frac{3}{2}$ tem área igual a $\frac{9}{4} = (\frac{3}{2})^2$.

Generalizando, é possível demonstrar que aárea do quadrado de lado $x$ é igual a $x^2$, para qualquer que seja o número $x$. E pararetângulos também podemos demonstrar que para quaisquer $x$ e$y$, a área do retÂngulo de base $x$ e altura $y$ é igual a $xy$. Portanto, tanto para quadrados quanto para retângulos a área é dada pelo *ˋproduto da base pela altura"*.
Antes de apresentar exemplos, lembre-se de que o perímetro de um quadrilátero é a soma dos comprimentos dos seus quatro lados. Deste modo, se um retângulo tem lados $x$ e $y$, então o seu perímetro éigual a $2x+2y$, enquanto que a sua área é $xy$. Pelas próprias definições vemos que área e perímetro são grandezas de natureza diferentes e que não podem ser confundidas. A área mede a porção do plano que é ocupada pela figura e o perímetro mede o comprimento do seu contorno. Além disso, como exemplificado logo a seguir existem retângulos de áreas iguais, mas com perímetros diferentes e, reciprocamente, existem retângulos com perímetros iguais, mas com áreas diferentes.

- A figura a seguir ilustra dois retângulos de mesma área, mas de perímetros diferentes. O retângulo$2 \times 6$ tem perímetro 16 enquanto que o retângulo $3 \times 4$ tem perímetro 14, apesar de estes dois retângulos possuírem áreas iguais a 12.

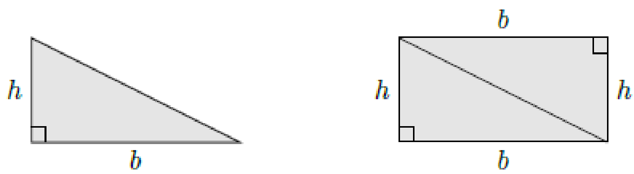


- Por outro lado, a figura a seguir ilustra dois retângulos com mesmo perímetro, mas de áreas diferentes. O retângulo $3 \times 6$ tem área 18 enquanto o retângulo $4 \times 5$ tem área 20, apesar de estes dois retângulos possuírem perímetros iguais a 18.



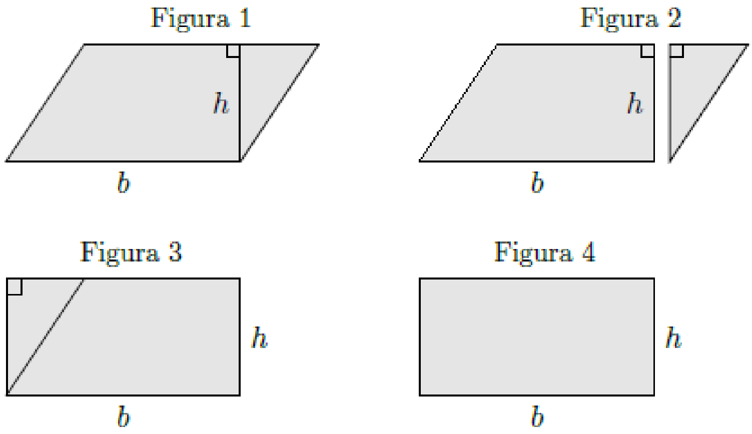
### A área do triângulo retângulo

Um triâgulo retângulo de base $b$ e de altura $h$ é a metade de um retângulo de base $b$ e de altura $h$. Como a área de um retângulo é igual ao produto da base pela altura, segue que a área de um triângulo retângulo é igual a metade da base vezes a altura, ou seja, a área do triângulo retângulo de base $b$ e altura $h$ é dada pela expressão $\dfrac{bh}{2}$.

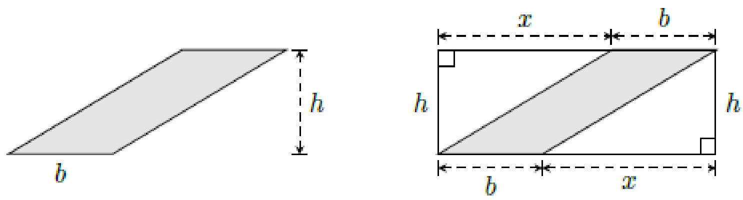



### A área do paralelogramo

Sabemos que um paralelogramo é um quadrilátero com pares de lados opostos paralelos e de mesmo comprimento. A distância $h$ entre dois lados opostos de um paralelogramo é chamada de **altura** em relação a estes lados, enquanto que estes dois lados são chamados de **bases** do paralelogramo. Quando um segmento $h$ perpendicular a uma base do paralelogramo intersecta a base oposta, a sequência de figuras a seguir ilustra como, nestes casos, um paralelogramo de base $b$ e altura $h$ pode ser transformado, sem alterar a sua área, em um retângulo também de base $b$ e altura $h$. Como a área do retângulo é $bh$ vemos que a área do paralelogramo também é dada por esta expressão.




Agora, de modo geral, considere um paralelogramo qualquer de base $b$ e de altura $h$. Adicionando ao paralelogramo dois triângulos retângulos iguais, como indicado na figura a seguir, formamos um retângulo de base$b + x$ e de altura $h$.

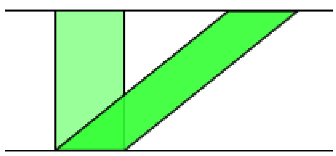



Portanto, para obter a área do paralelogramo, podemos subtrair da área do retângulo de base $b + x$ e altura $h$ as áreas dos dois triângulos retângulos de base $x$ e altura $h$. Logo a área do paralelogramo é dada por

$$(b+x)h - \frac{xh}{2} - \frac{xh}{2} = bh + xh - \frac{xh}{2} - \frac{xh}{2} = bh.$$

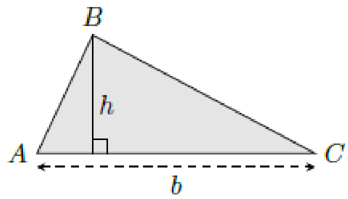
Assim, para quaisquer paralelogramos e retângulos, suas áreas são calculadas pela mesma expressão `base vezes altura’.

Como a área de um paralelogramo é o produto da base vezes a altura, todos os paralelogramos de mesma base e mesma altura possuem áreas iguais. A figura a seguir ilustra, então, um retângulo e um paralelogramo com áreas iguais.

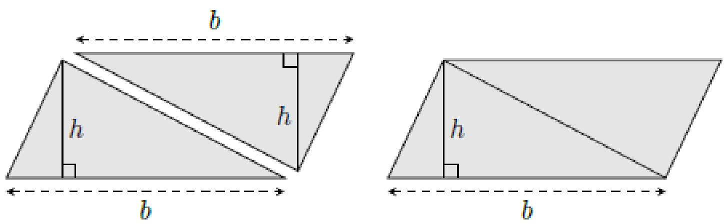


**Área de um triângulo qualquer**

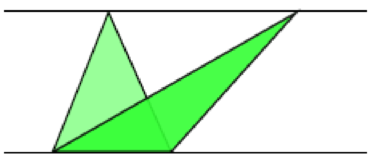
Considere um triângulo qualquer $ABC$. Seja $b$ o comprimento do seu lado $AC$. A altura do triângulo em relação a base $AC$ é o segmento que passa pelo vértice $B$ e é perpendicular a reta AC. Seja $h$ o comprimento desta altura.




Nas figuras a seguir vemos que com duas cópias de um triângulo de base $b$ e altura $h$ podemos montar um paralelogramo de base $b$ e altura $h$. Assim o paralelogramo tem o dobro da área do triângulo. Como a área do paralelogramo é *base vezes altura*,a área do triângulo deve ser *base vezes altura dividido por dois*, uma vez que o triângulo tem metade da área do paralelogramo. Deste modo,a área do triângulo de base $b$ e altura $h$ é $\dfrac{b \times h}{2}$.

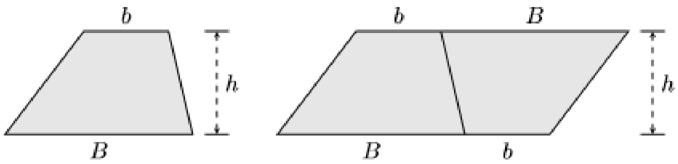



Da expressão da área de um triângulo segue que se dois triângulos possuem a mesma base e a mesma altura, então eles possuem a mesma área. Na figura a seguir, se as retas são paralelas, vemos triângulos diferentes, mas com áreas iguais.



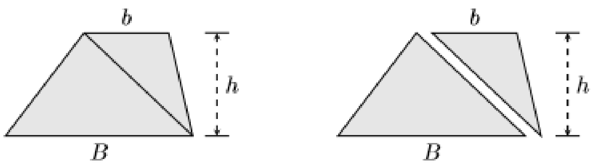
**A área do trapézio**

Considere um trapézio de lados paralelos de comprimentos $b$ e $B$. Estes lados são chamados de bases do trapézio e um segmento perpendicular a estas bases é chamado de altura do trapézio. Seguindo os esquemas abaixo, vemos que com duas cópias do trapézio de bases$b$ e $B$B e de altura $h$ pode-se construir um paralelogramo de base $b+B$ e de altura $h$. Por isto, a área do trapézio de bases $b$ e $B$ e altura $h$ é a metade da área do paralelogramo de base $b+B$ e altura $h$. Logo a área deste trapézio é $\dfrac{(b+B)\times h}{2}$.




De outro modo, a área de um trapézio de bases $b$ e $B$ e de altura $h$ também pode ser calculada da seguinte maneira. Traçando uma diagonal do trapézio, como está indicado na figura a seguir, vemos que é possível dividir o trapézio em dois triângulos: um de base $b$ e de altura $h$ e o outro de base $B$ e de altura $h$. Somando as áreas destes triângulos obtemos a área do trapézio:

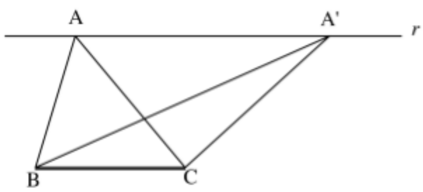
$$\frac{bh}{2}+\frac{Bh}{2}=\frac{(b+B)h}{2}$$




**Propriedades Importantes**

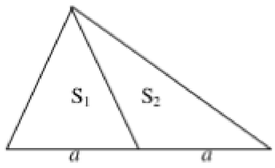
*Propriedade 1*

A área de um triângulo não se altera quando sua base permanece fixa e o terceiro vértice percorre uma reta paralela à base.




Na figura acima, a reta $r$ é paralela a $BC$. Os triângulos $ABC$ e $A'BC$ têm mesma área, pois possuem mesma base e mesma altura.

*Propriedade 2*




$S_1 = S_2$

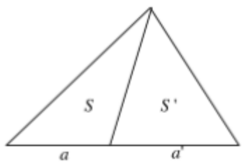
Em um triângulo, uma mediana divide sua área em partes iguais.

Defato, os dois triângulos interiores possuem mesma base e mesma altura. Logo, possuem mesma área.

Quando duas figuras possuem mesma área, dizemos que elas são equivalentes. Portanto, o enunciado desta propriedade pode ser: "Uma mediana divide o triângulo em dois outros equivalentes."

*Propriedade 3*

Se dois triângulos têm mesma altura, então a razão entre suas áreas é igual à razão entre suas bases. A afirmação acima tem comprovação imediata a partir da fórmula que calcula a área do triângulo.




$$\frac{S}{S'} = \frac{a}{a'}$$