AULA 11: **ARITMÉTICA** – CONGRUÊNCIAS, CRITÉRIOS DE DIVISIBILIDADE E RESTOS, CONGRUÊNCIAS E SOMAS, CONGRUÊNCIAS E PRODUTOS.

I. Os números inteiros são congruentes à 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9 módulo 10. Assim, o quadrado desses números será congruente à 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64 ou 81 módulo 10. Ou seja, um quadrado perfeito deixa como resto na divisão por 10 os números 0, 1, 4, 9, 6 ou 5 (já que $81 \equiv 1 \bmod 10$, $64 \equiv 4 \bmod 10$, $49 \equiv 9 \bmod 10$ e $36 \equiv 6 \bmod 10$). Portanto os algarismos das unidades de um quadrado perfeito são 0, 1, 4, 5, 6 ou 9.

II. $30 \equiv -1 \bmod 31$ e $61 \equiv 1 \bmod 31$. Elevando a primeira congruência à 99ª potência e a segunda à 100ª potência, temos:
$30^{99} \equiv -1 \bmod 31$ e $61^{100} \equiv 1 \bmod 31$. Somando estas:
$30^{99} + 61^{100} \equiv -1 + 1 \bmod 31$
$30^{99} + 61^{100} \equiv 0 \bmod 31$, portanto deixa resto zero na divisão por 31.

III. $10^2 \equiv 2 \bmod 7$
$10^{10} \equiv 2^5 \equiv 4 \bmod 7$,
$10^{100} \equiv 4^2 \times 4^2 \times 4^2 \times 4^2 \times 4^2 \equiv 2^5 \equiv 4 \bmod 7$. Repetindo o processo várias vezes conclui-se que todas as parcelas da soma são congruentes à 4 modulo 7. Como o expoente começa como 10^1 termina em 10^{10}, há 10 parcelas, a soma é congruente à $10 \times 4 = 40$ módulo 7, portanto deixa resto 5 na divisão por 7.

IV. $a = mq_1 + t$
$r = mq_2 + t$. Subtraindo as congruências:
$a - r = m(q_1 - q_2)$
$a = m(q_1 - q_2) + r$. Como r é menor que m, ele é o resto da divisão de a por m, cujo quociente é $q_1 - q_2$.

V. Um número é divisível por 4 se o número formado pelos dois últimos algarismos for múltiplo de 4.
Um número é divisível por 8 se o número formado pelos três últimos algarismos for múltiplo de 8.
Um número é múltiplo de 25 se terminar em 00, 25, 50 ou 75.
Um número é múltiplo de 125 se terminar em 000, 125, 250, 375, 500, 675, 750 ou 875.

Tendo em vista estes critérios basta encontrar o menor múltiplo de 4, 8, 25 e 125 mais próximos dos números dados e calcular a diferença entre eles:
3254
Divisão por 4: resto 2
Divisão por 8: resto 6
Divisão por 25: resto 4
Divisão por 125: resto 4.
12736
Divisão por 4: resto 0
Divisão por 8: resto 0
Divisão por 25: resto 11
Divisão por 125: resto 111.
54827
Divisão por 4: resto 3
Divisão por 8: resto 3
Divisão por 25: resto 2
Divisão por 125: resto 77.
33875435
Divisão por 4: resto 3
Divisão por 8: resto 3
Divisão por 25: resto 10
Divisão por 125: resto 60.
57612510
Divisão por 4: resto 2
Divisão por 8: resto 6
Divisão por 25: resto 10
Divisão por 125: resto 10.

VI. Basta somar os restos que estes números deixam nas respectivas divisões:
Divisão por 2:
1 + 0 – 0 = 1
Divisão por 3:
2 + 1 – 2 = 1
Divisão por 4:
1 + 2 – 0 = 3
Divisão por 5:
0 + 3 – 2 = 1
Divisão por 8:
1 + 2 – 0 = 3
Divisão por 9:

$8 + 4 - 8 = 4$
Divisão por 10:
$5 + 8 - 2 = 11 = 1$
Divisão por 25:
$10 + 13 - 7 = 16$
Divisão por 125:
$35 + 38 - 82 = - 9 = 116$

VII. Semelhantemente ao anterior, basta multiplicar apenas os restos:
Divisão por 2:
$0^3 \times 0^2 \times 1^{20} = 0$
Divisão por 3:
$2^3 \times 1^2 \times 1^{20} = 8 = 2$
Divisão por 4:
$2^3 \times 0^2 \times 1^{20} = 0$
Divisão por 5:
$4^3 \times 1^2 \times 1^{20} = 64 = 4$
Divisão por 8:
$2^3 \times 0^2 \times 1^{20} = 0$
Divisão por 9:
$5^3 \times 4^2 \times 1^{20} = 125 \times 16 \times 1 = 8 \times 7 = 2$
Divisão por 10:
$4^3 \times 6^2 \times 1^{20} = 64 \times 36 \times 1 = 4 \times 6 = 24 = 4$
Divisão por 25:
$9^3 \times 11^2 \times 1^{20} = 729 \times 121 \times 1 = 4 \times 21 = 84 = 9$
Divisão por 125:
$84^3 \times 36^2 \times 1^{20} = 592704 \times 1296 = 79 \times 46 = 3634 = 9$

VIII. $ac = mx + r$,
$bc = my + r$. Subtraindo as congruências:
$c (a - b) = m (x - y)$. Como x e y são inteiros, sua diferença também será um inteiro. Portanto podemos escrever:
$\frac{c\,(a - b)}{m} = x - y$. Conclui-se que m divide c (a - b), e como c e m são primos entre si, m divide a – b, o que implica $a \equiv b \mod m$.