Aula 1 – 4º Encontro

Algoritmo da Divisão e Análise dos restos

01/10/2016

1. (Exercício 2, pág. 29, “Encontros de Aritmética”)
Encontre o número natural que ao ser dividido por 7 resulta um quociente 4 e resto maior possível.

1)

Seja a o número natural.

Observe que ao dividirmos por 7 o maior resto possível será 6

Assim,

$$a = 7 \cdot 4 + 6$$

$$a = 28 + 6$$

$$a = 34$$

2. (Exercício 3, pág. 29, “Encontros de Aritmética”)
Encontre os números naturais que, quando divididos por 8 deixam resto igual ao dobro do quociente.

2)

Seja a um número natural qualquer, onde a é o dividendo, 8 é o divisor de a, q é o quociente e r é o resto.

Temos que

$$r = 2q$$

Logo,

$$a = 8q + r \quad \Rightarrow \quad a = 8q + 2q$$

$$\Rightarrow a = 10q$$

Mas não podemos deixar de observar que $8q = 4 \cdot 2q$

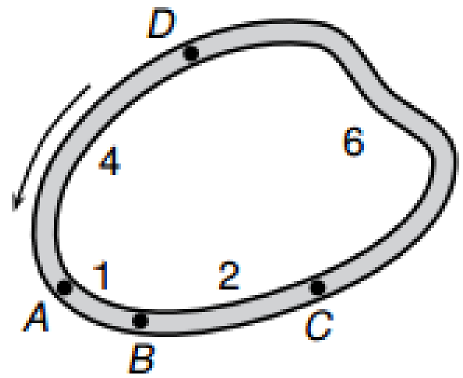
Logo, o divisor é menor que 4, caso contrario o dobro será maior que 8.

Isto é, os naturais que quando divididos por 8 deixam resto igual ao dobro do quociente são os múltiplos de 10, menores que 4, isto é,

$$1 \times 10 = 10, 2 \times 10 = 20 \; e \; 3 \times 10 = 30$$

3. (OBMEP 2006 – N1Q6 – 2ªfase)A figura abaixo representa o traçado de uma pista de corrida.

Os postos A, B, C e D são usados para partidas e chegadas de todas as corridas. As distâncias entre postos vizinhos, em quilômetros, estão indicadas na figura e as corridas são realizadas no sentido indicado pela flecha. Por exemplo, uma corrida de 17 quilômetros pode ser realizada com partida em D e chegada em A.

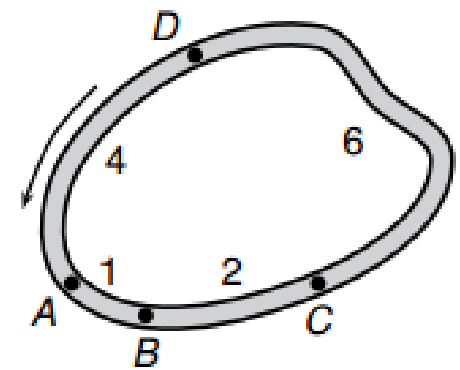


(a) Quais são os postos de partida e chegada de uma corrida de 14 quilômetros?

(b) E para uma corrida de 100 quilômetros, quais são estes postos?

(c) Mostre que é possível realizar corridas com extensão igual a qualquer número inteiro de quilômetros.

3)



a) Observe que uma volta completa na pista tem extensão:

$$1km + 2km + 6km + 4km = 13km$$

Por isso para percorrer $14km$ é preciso dar uma volta completa e percorrer mais $1km$.

A única forma de percorrer $1km$ respeitando o sentido da corrida é começando em **A** e terminando em **B**.

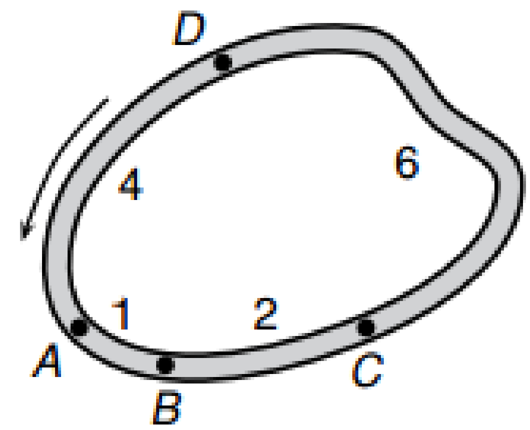
b) Temos

$$100 = 7 \times 13 + 9$$

Isto é, uma corrida de $100km$ corresponde a dar 7 voltas completas na pista mais $9km$.

A única forma de percorrer $9km$ respeitando-se o sentido da corrida é começando em **A** e terminando em **D**.

c) Observe na tabela a seguir que é possível executar qualquer corrida de comprimento:



Comprimento	Partida	Chegada
1 km	A	B
2 km	B	C
3 km	A	C
4 km	D	A
5 km	D	B
6 km	C	D
7 km	D	C
8 km	B	D
9 km	A	D
10 km	C	A
11 km	C	B
12 km	B	A

Se a corrida tem comprimento um múltiplo qualquer de $13km$, podemos começar num ponto, dar um certo números de voltas, e voltar para o mesmo ponto de partida.

E se a corrida tem um comprimento maior que 13, efetuamos a divisão deste número por 13. O quociente corresponde ao número de voltas e o resto é um pedaço de uma volta de comprimento de $1km$ até $12km$.

4. (Exercício 5, pág. 31, “Encontros de Aritmética”)
Na divisão de dois números inteiros, o quociente é 16 e o resto é o maior possível. Se a soma do dividendo e do divisor é 125, determine o resto.

4) Sejam $\boldsymbol{a}$ o dividendo e $\boldsymbol{b}$ o divisor.
Como o resto é o maior possível, então ele deve ser igual a $b-1$, que é o maior número permitido para o resto de uma divisão por b.
Assim,

$$a = 16b + (b-1)$$

$$\Rightarrow a = 17b - 1 \quad (*)$$

Como a soma $(a+b) = 125$
Vamos somar b em ambos os lados da equação $(*)$:

$$a + b = 17b - 1 + b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 18b - 1 = 125 \quad \Rightarrow \quad 18b = 126 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{126}{18} = 7$$

Logo,

$$a = 17 \cdot 7 - 1 = 118$$

Portanto o dividendo é $a = 118$, o divisor é $b = 7$, o quociente é 16 e o resto é 6.

5. (Portal da Matemática – Algoritmo da Divisão Euclidiana) Formalize matematicamente o Algoritmo da Divisão Euclidiana.

5) Algoritmo da Divisão Euclidiana:

Sejam dados dois números naturais a e b, com $a > 0$ e b qualquer.

Queremos comparar o número natural b com os múltiplos de a

$$M(a) = \{0, a, 2a, 3a, 4a, \ldots, na\}$$

Considere todos os intervalos dos múltiplos de a nos naturais:

$$\mathbb{N} = [0, a) \cup [a, 2a) \cup [2a, 3a) \cup \cdots \cup [na, (n+1)a) \cup \cdots$$

Observe que os intervalos acima são dois a dois sem elementos em comum. Portanto, o número b estará em apenas um intervalo.

Suponha que b pertença ao intervalo

$$[qa, (q+1)a)$$

Logo, existem dois números naturais q e r, unicamente determinados, tais que

$$b = aq + r, \quad \text{com} \quad 0 \leq r < a.$$

$$b = aq + r, \quad \text{com} \quad 0 \leq r < a.$$

O número b é chamado *dividendo*, o número a *divisor*, os números q e r são chamados, respectivamente, *quociente* e *resto* da divisão de b por a.

Note que dados dois números naturais a e b, nem sempre b é múltiplo de a, este será o caso se, e somente se, $r = 0$.

6. (Exemplo 16, pág. 38, “Encontros de Aritmética”)
Nas divisões de 163 e 360 por 7 obtemos, respectivamente, restos 2 e 3.

$$163 = 7 \times 23 + 2 \qquad\qquad 360 = 7 \times 51 + 3$$

Qual é o resto da divisão de $163 + 360$ por 7?

6)

Como $163 = 7 \times 23 + 2$ e $360 = 7 \times 51 + 3$

Logo,

$$\begin{aligned} 163 + 360 &= (7 \times 23 + \mathbf{2}) + (7 \times 51 + \mathbf{3}) \\ &= (7 \times 23) + \mathbf{2} + (7 \times 51) + \mathbf{3} \\ &= (7 \times 23) + (7 \times 51) + \mathbf{2} + \mathbf{3} \\ &= 7 \cdot (23 + 51) + \mathbf{5} \\ &= 7 \cdot 74 + \mathbf{5} \end{aligned}$$

Portanto o resto da divisão de $163 + 360$ por 7 é 5.

7. (Exercício 20, pág. 43, "Encontros de Aritmética") :

a) A soma de um múltiplo de 7 é um múltiplo de 7?

b) Qual é o resto da divisão de $7 \times 82 + 13$ por 7?

c) Qual é o resto da divisão de $7 \times 29 + 10$ por 7?

d) Qual é o resto da divisão de $7 \times 41 + 93$ por 7?

e) Qual é o resto da divisão de $7 \times 18 - 2$ por 7?

f) Se $a = 7 \times 53 + 1$ e $b = 7 \times 15 + 3$, qual é o resto da divisão de $a + b$ por 7?

g) Se $m = 7 \times 22 + 5$ e $n = 7 \times 38 + 6$, qual é o resto da divisão de $m + n$ por 7?

Programa de Iniciação Científica da OBMEP

7)

a) A soma de um múltiplo de 7 é um múltiplo de 7?

Sim, pois

Sejam $7n\ e\ 7m$ dois múltiplos de 7,

então

$$7n + 7m = 7(m + n)$$

Que é múltiplo de 7.

b) Qual é o resto da divisão de $7 \times 82 + 13$ por 7?

Sempre que escrevemos um número na forma $7q + r$, sendo r um resto de 0 até 6, este r é o resto da divisão do número dado por 7.

Isto é a definição do resto de uma divisão.

Observe que $13 = 7 \times 1 + 6$

Portanto o resto da divisão de $7 \times 82 + 13$ por 7 é 6.

c) Qual é o resto da divisão de $7 \times 29 + 10$ por 7?

Como $10 = 7 \times 1 + 3$

Temos

$$7 \times 29 + 10 = 7 \times 29 + (7 \times 1 + 3)$$

$$= (7 \times 29) + (7 \times 1) + 3$$

$$= 7 \times (29 + 1) + 3$$

$$= 7 \times 30 + 3$$

Portanto o resto da divisão deste número por 7 é 3.

d) Qual é o resto da divisão de $7 \times 41 + 93$ por 7?

Dividindo 93 por 7 obtemos quociente 13 e resto 2, isto é,

$$93 = 7 \times 13 + 2$$

Daí ,

$$7 \times 41 + 93 = 7 \times 41 + 7 \times 13 + 2$$

$$= 7 \cdot (41 + 13) + 2$$

$$= 7 \times 54 + 2$$

Portanto o resto da divisão deste número por 7 é 2.

e) Qual é o resto da divisão de $7 \times 18 - 2$ por 7?

Observe que :

$$7 \times 18 - 2 = 7 \times (17 + 1) - 2$$

$$= (7 \times 17) + (7 \times 1) - 2$$

$$= 7 \times 17 + \underbrace{7 - 2}$$

$$= 7 \times 17 + 5$$

Portanto o resto da divisão deste número por 7 é 5.

f) Se $a = 7 \times 53 + 1$ e $b = 7 \times 15 + 3$, qual é o resto da divisão de $a + b$ por 7?

Observe que

$$a + b = (7 \times 53 + \mathbf{1}) + (7 \times 15 + \mathbf{3})$$

$$= (7 \times 53) + (7 \times 15) + \mathbf{1} + \mathbf{3}$$

$$= 7 \cdot (53 + 15) + \mathbf{4}$$

$$= 7 \cdot 68 + \mathbf{4}$$

Ou simplesmente podemos somar os restos $1 + 3 = 4$

Portanto o resto da divisão de $a + b$ por 7 é 4.

g) Se $m = 7 \times 22 + 5$ e $n = 7 \times 38 + 6$, qual é o resto da divisão de $m + n$ por 7?

Analogamente aos itens anteriores somando os restos obtemos

$$5 + 6 = 11$$

E como

$$11 = 7 \times 1 + \mathbf{4}$$

Temos que o resto é 4

Portanto o resto da divisão de $m + n$ por 7 é 4.

8. (Exercício 21, pág. 44, "Encontros de Aritmética")
Sabe-se que 503 e 418 deixam restos 7 e 2 quando divididos por 8, respectivamente. Quais são os restos das divisões de $503 + 418$ e 503×418 por 8? Qual é o resto da divisão de $503 - 418$ por 8?

8)

Pelos exercícios anteriores temos que os restos das divisões de somas é igual a soma dos restos, isto é,

O resto da divisão de $503 + 418$ por 8 é dado por

$$7 + 2 = 9$$

E como a divisão é por 8, temos que

$$9 = 8 \times 1 + \mathbf{1}$$

Portanto o resto da divisão de $503 + 418$ por 8 é 1.

Analogamente,

O resto da divisão de 503×418 por 8 é dado por

$$7 \times 2 = 14$$

E como a divisão é por 8, temos que

$$14 = 8 \times 1 + \mathbf{6}$$

Portanto o resto da divisão de 503×418 por 8 é 6.

Da mesma forma,

O resto da divisão de $50^3 - 41^8$ por 8 é dado por

$$7 - 2 = 5$$

Portanto o resto da divisão de $50^3 - 41^8$ por 8 é 5.

9. (Exercício 27, pág. 48, “Encontros de Aritmética)
Considerando somente números inteiros positivos,

a) O número $7 \cdot 38 + 5$ é divisível por 7?

b) O número $7 \cdot 241 + 84$ é múltiplo de 7?

c) Para quais condições sobre b, o número $7a + b$ é um múltiplo de 7?

d) Sabendo que o número $7a + b$ é divisível por 7, o que podemos afirmar sobre o número b?

9)

a) O número $7 \cdot 38 + 5$ é divisível por 7?

Não, pois tem resto 5.

b) O número $7 \cdot 241 + 84$ é múltiplo de 7?

Sim, pois

$$84 = 7 \cdot 12$$

Logo,

$$7 \cdot 241 + 7 \cdot 12 = 7 \cdot (241 + 12) = 7 \cdot 253$$

c) Para quais condições sobre b, o número $7a + b$ é um múltiplo de 7?

Para b sendo múltiplo de 7, isto é,

$$b = 7m$$

Logo,

$$7a + b = 7a + 7m = 7(a + m)$$

d) Sabendo que o número $7a + b$ é divisível por 7, o que podemos afirmar sobre o número b?

Como vimos no item anterior, b é múltiplo de 7.

10. (Exercício 32, pág. 51, "Encontros de Aritmética)
Escreva o número 1820 como um produto de números primos.

10)

$$\begin{array}{r|l} 1820 & 2 \\ 910 & 2 \\ 455 & 5 \\ 91 & 7 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

$$\mathbf{1820 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13}$$

11. (Exercício 34, Fomin, pág. 22 e 23):

a) O número $2^9 \cdot 3$ é divisível por 2?

b) O número $2^9 \cdot 3$ é divisível por 5?

c) O número $2^9 \cdot 3$ é divisível por 8?

d) O número a não é divisível por 3. É possível que o número $2a$ seja divisível por 3?

e) O número a é par. É verdade que $3a$ tem que ser divisível por 6?

f) O número $5a$ é divisível por 3. É verdade que a tem que ser divisível por 3?

g) O número $15a$ é divisível por 6. É verdade que a tem que ser divisível por 6.

11)

a) O número $2^9 \cdot 3$ é divisível por 2?

Sim,

Já que 2 é um dos fatores na decomposição do número dado.

b) O número $2^9 \cdot 3$ é divisível por 5?

Não,

Já que a decomposição deste número não contém o número primo 5.

c) O número $2^9 \cdot 3$ é divisível por 8?

Sim,

Já que $8 = 2^3$ e existem nove fatores iguais a 2 na decomposição do número dado.

d) O número a não é divisível por 3. É possível que o número $2a$ seja divisível por 3?

Não,

Pois 3 não aparece na decomposição de a, e portanto não pode aparecer na decomposição de $2a$.

e) O número a é par. É verdade que $3a$ tem que ser divisível por 6?

Sim,

Seja $a = 2k$,

Logo,

$$3a = 3 \cdot 2k = 6k$$

Portanto é verdade já que 2 e 3 aparecem na decomposição do número $3a$

f) O número $5a$ é divisível por 3. É verdade que a tem que ser divisível por 3?

Sim,

Pois a decomposição de $5a$ contém 3, mas a decomposição de 5 não.

g) O número $15a$ é divisível por 6. É verdade que a tem que ser divisível por 6.

Não,

Por exemplo, a poderia ser igual 2.

12. (Problema 3.33, pág. 62, Apostila 1 da OBMEP, "Iniciação à Aritmética") Determine o resto da divisão por 3 do número $4^{100} + 32^{30}$.

12) Primeiramente observe as tabelas dos restos das divisões por 3:

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$

$\times$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

Observe que:

$$4 = 3 \cdot 1 + \mathbf{1} \qquad \text{e} \qquad 32 = 3 \cdot 10 + \mathbf{2}$$

logo,

$$4^{100} + 32^{30} = \overline{1}^{100} + \overline{2}^{30} =$$

$$= \overline{1} + (\overline{2}^{2})^{15} = \overline{1} + \overline{1}^{15} =$$

$$= \overline{1} + \overline{1} = \overline{2}$$

13. Na figura, as letras A e B representam os possíveis algarismos que tornam o produto dos números 2A5 e 13B um múltiplo de 36.

a) Em todos os possíveis resultados para o produto desses números, o algarismo das unidades é o mesmo. Qual é esse algarismo ?

b) Quais são os possíveis valores de B?

c) Qual é o maior valor possível para esse produto ?

13)

a) Como o algarismo das unidades do número $2A5$ é 5, os possíveis algarismos das unidades para o produto dos números $2A5$ e $13B$ 0 ou 5.

Como esse produto é múltiplo de 36, que é par, o produto também é par.

$$\begin{array}{r} 2A5 \\ \times 13B \\ \hline \cdots\cdots 5B \end{array}$$

Logo o seu último algarismo não pode ser 5, logo, é 0.

b) Como $2A5$ é ímpar e o produto que é múltiplo de 36 é par, então o número $13B$ deve ser par, isto é, $B = 0,2,4,6\ ou\ 8$.

$$\underbrace{2A5}_{ímpar} \cdot \underbrace{13B}_{par} = \underbrace{36m}_{par}$$

Observe que $36 = 2^2 \cdot 3^2$

Isto é, o produto é múltiplo de 4 e como o fator $2A5$ não é múltiplo de 4, segue que o fator $13B$ tem que ser múltiplo de 4.

Pelo critério da divisibilidade por 4, temos que $3B$, tem que ser divisível por 4.

Logo as únicas possibilidades para B são os algarismos 2 ou 6, já que 30, 34 e 38 não são divisíveis por 4.

Portanto $B = 2$ ou $B = 6$

c) Sabendo que $B = 2$ ou $B = 6$, pelo item anterior, temos:

- Se $B = 2$:

Então

$$2A5 \cdot 132 = 36m$$

Como $132 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11$ e $36 = 2^2 \cdot 3^2$,

temos

$$2A5 \cdot \cancel{2^2} \cdot \cancel{3} \cdot 11 = \cancel{2^2} \cdot 3^{\cancel{2}} m$$

Assim temos que $2A5$ tem que ser múltiplo de 3.

Logo,

$$2 + A + 5 = nº\ divisível\ por\ 3$$

Então,

$$A = 2{,}5\ ou\ 8$$

- Se $B = 6$:

Então

$$2A5 \cdot 136 = 36m$$

Como $136 = 2^3 \cdot 17$ e $36 = 2^2 \cdot 3^2$,

temos

$$2A5 \cdot 2^{\cancel{3}} \cdot 17 = \cancel{2^2} \cdot 3^2 m$$

Assim temos que $2A5$ tem que ser múltiplo de 9.

Logo,

$$2 + A + 5 = n^{\underline{o}}\ divisível\ por\ 9$$

Então,

$$A = 2$$

Resumindo, todas as possibilidades para o produto dos números $2A5$ e $13B$ ser múltiplo de 36 são:

- $225 \times 132 = 29700$
- $255 \times 132 = 33660$
- $285 \times 132 = 37620$
- $225 \times 136 = 30600$

Portanto o maior valor possível para esse produto é 37620 com $A = 8$ e $B = 2$.