# Soluções das Questões – 2º SIMULADO – Nível 2

## QUESTÃO 1

### item a)
No encontro da linha 7 com a coluna 21 foi escrito o algarismo 1, pois 21 é múltiplo de 7.

### Item b)
A soma dos algarismos da linha 23 é 4, pois de 1 a 100 existem exatamente quatro múltiplos de 23 (a saber: 23, 46, 69, 92).

### Item c)
Na coluna 98 aparecerá 1 nas casas das linhas correspondentes aos divisores de 98. Como 98 = 2 x $7^2$, então 98 possui 2 x 3 = 6 divisores (a saber: 1, 2, 7, 14, 49 e 98). Logo, a soma dos algarismos que aparecem na coluna 98 é 6.

### Item d)
A soma dos algarismos será ímpar nas colunas cujo número tenha uma quantidade ímpar de divisores. Os números que possuem uma quantidade ímpar de divisores são apenas os quadrados perfeitos. De fato, se $d$ divide $n$, então $n/d$ também divide $n$; logo os divisores de um número natural sempre ocorrem aos pares, exceto quando $d = n/d$, ou seja, quando $n = d^2$.
Como $10^2$ = 100, temos 10 quadrados perfeitos de 1 a 100, incluindo os extremos. Logo, a soma dos algarismos é ímpar nas colunas correspondentes aos quadrados perfeitos.

Obs.: A partir da decomposição de um número natural em fatores primos, é fácil encontrar todos os seus divisores:
Se $n = p_1^{r_1} . p_2^{r_2} . \ \ldots \ . \ p_s^{r_s}$ é a decomposição em fatores primos de $n$, então os divisores positivos de $n$ são da forma:

$$p_1^{t_1} . \ p_2^{t_2} . \ \ldots \ . \ p_s^{t_s}, \text{ com } 0 \leq t_i \leq r_i, \ i = 1, \ldots, s.$$

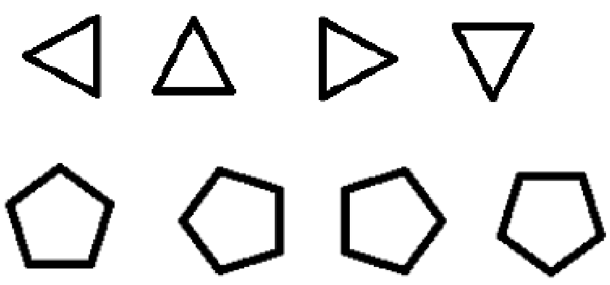
Este fato permite contar facilmente o número de divisores positivos de $n$ , a saber

$$(r_1 + 1).(r_2 + 1). \ldots .(r_s + 1) .$$

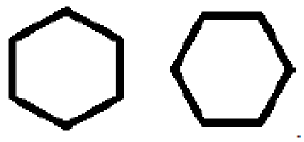
Como consequência, $n$ tem um número ímpar de divisores se e somente se todos os expoentes das potências de primos de sua decomposição forem números pares e, portanto, $n$ deve ser um quadrado perfeito.

## QUESTÃO 2

Como os cartões são quadrados podemos girá-los como quiser. Assim, o triângulo e o pentágono podem ser colados de 4 maneiras distintas.



Já o quadrado, não importa quanto giremos, ele sempre gerará a mesma imagem; e para o hexágono teremos duas possibilidades.



**item a)**

O pentágono pode ser visualizado de 4 maneiras distintas. Basta observar que o pentágono tem um lado paralelo a um dos lados do cartão, logo há 4 lados possíveis para esse lado ficar paralelo a um dos lados do cartão.

**Item b)**

O hexágono pode ser visualizado de 2 maneiras distintas. Basta observar que o hexágono tem dois lados opostos paralelos aos lados do cartão, logo esses lados podem estar paralelos aos lados de cima e de baixo, ou aos lados direito e esquerdo.

**Item c)**

Pelo princípio multiplicativo, o triângulo pode ser colado em 4 posições e de 4 maneiras distintas (4 x 4 =16 possibilidades). O quadrado terá 3 posições possíveis de uma única maneira. O pentágono terá 2 posições possíveis e pode ser colado de 4 maneiras e o hexágono deverá ser colado na quarta e última posição, de duas maneiras possíveis.

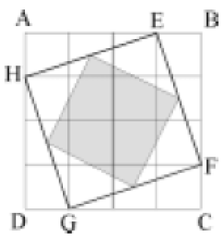
Logo, há 4 x 4 x 3 x 1 x 2 x 4 x 1 x 2 = 768 maneiras distintas.

*Outra solução*

Podemos começar posicionando as figuras no álbum. Isso pode ser feito de 4 x 3 x 2 x 1 = 24 maneiras diferentes. Depois, para cada uma das 24 maneiras, podemos modificar a posição das figuras: Triângulo, 4 maneiras; Quadrado, 1 maneira; Pentágono, 4 maneiras; Hexágono, 2 maneiras.

Logo, teremos um total de 24 x 4 x 1 x 4 x 2 = 768 configurações diferentes para a primeira página do álbum.

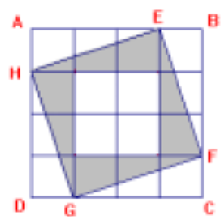
**QUESTÃO 3** O quadrado *ABCD* da figura está dividido em 16 quadradinhos iguais. O quadrado sombreado tem os vértices sobre os pontos médios do quadrado *EFGH*.




**A)** A área do quadrado *EFGH* corresponde a que fração da área do quadrado ABCD?
**B)** Se o quadrado *ABCD* tem 80 cm$^2$ de área, qual é o lado do quadrado sombreado?

**SOLUÇÃO:**

**A)** *Solução 1*: A figura ao lado mostra que o quadrado *EFGH* é formado por quatro triângulos iguais (AEH, EFB, FGC e GHD) e quatro quadradinhos. Cada um dos triângulos tem área igual à metade da área de três quadradinhos. Logo, a área do quadrado *EFGH* é igual à área de $4+4\times\frac{3}{2}=4+6=10$ quadradinhos. Como a área do quadrado *ABCD* é igual à área de 16 quadradinhos, a fração pedida é




$$\frac{\text{área do quadrado } EFGH}{\text{área do quadrado } ABCD}=\frac{\text{área de 10 quadradinhos}}{\text{área de 16 quadradinhos}}=\frac{10}{16}=\frac{5}{8}.$$

A área (em quadradinhos) do quadrado *EFGH* também pode ser calculada subtraindo-se da área do quadrado *ABCD* a área dos quatro triângulos externos ao quadrado *EFGH*. Cada um destes triângulos tem área igual à área de $\frac{3}{2}$ quadradinhos, donde a área do quadrado *EFGH* é igual à área de $16-4\times\frac{3}{2}=16-6=10$ quadradinhos.

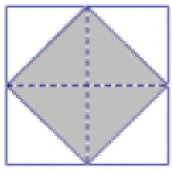
*Solução 2*: Se um quadrado tem lado de medida $L$ (em alguma unidade de comprimento) então sua área é $L^2$ (a unidade de área é o quadrado da unidade de comprimento). Deste modo, para calcular a área do quadrado *EFGH*, basta calcular $HE^2$, o que fazemos a seguir

Seja *k* o lado de um dos quadradinhos. O teorema de Pitágoras mostra que

$$HE^2=AH^2+AE^2=k^2+(3k)^2=10k^2$$

e já achamos a área do quadrado *EFGH*. Como a área do quadrado *ABCD* é $16k^2$, segue que a fração pedida é

$$\frac{10k^2}{16k^2} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$$



**B)** Notamos primeiro que o quadrado sombreado tem metade da área do quadrado *EFGH*. Isto fica claro na figura ao lado, onde vemos que o quadrado *EFGH* pode ser decomposto em oito triângulos iguais, quatro dos quais formam o quadrado sombreado.

Usando o resultado do item (A), vemos que a área do quadrado *EFGH é* $\frac{5}{8} \times 80 = 50\ \text{cm}^2$, e segue que a área do quadrado sombreado é igual a $\frac{1}{2} \times 50 = 25\ \ \text{cm}^2$.

Como $25 = 5^2$ segue que o lado do quadrado sombreado mede 5 cm.

## QUESTÃO 4

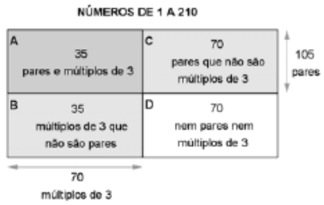
**a)** Como $210 \div 3 = 70$, existem 70 cartões cujos números são múltiplos de 3. Mais precisamente, esses cartões são os de número $3 = 1 \times 3$, $6 = 2 \times 3$, $9 = 3 \times 3$, $12 = 4 \times 3, \ldots$, $204 = 68 \times 3$, $207 = 69 \times 3$ e $210 = 70 \times 3$.

**b)** *1ª solução:* Um raciocínio idêntico ao do item a) mostra que existem $210 \div 2 = 105$ cartões com números pares entre 1 e 210 (inclusive). Por outro lado, os números pares entre 1 e 210 que são múltiplos de 3 são $2 \times 3$, $4 \times 3$, $6 \times 3, \ldots$, $68 \times 3$ e $70 \times 3$, em número de 35. Logo existem $105 - 35 = 70$ cartões com números pares que não são múltiplos de 3.

*2ª solução:* Há 105 cartões pares. Por outro lado, entre os 70 múltiplos de 3 há $70 \div 2 = 35$ pares; logo $105 - 35 = 70$ são pares mas não múltiplos de 3.

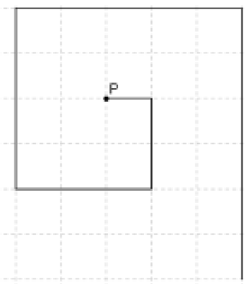
*3ª solução:* Retiram-se dos cartões os 70 múltiplos de 3, sobrando $210 - 70 = 140$ cartões. Desses, metade são pares, pois entre dois múltiplos de 3 consecutivos um dos números é par e o outro ímpar; logo entre eles há $140 - 70 = 70$ cartões que não são nem pares nem múltiplos de 3.

*4ª solução:* Observamos que entre os números de 1 a 6 existem dois números pares que não são múltiplos de 3, a saber, 2 e 4. Do mesmo modo, dos números de 7 a 13 temos dois números pares que não são múltiplos de 3, a saber, 8 e 10. Esse padrão se repete de seis em seis números consecutivos até chegar aos números de 205 a 210, onde aqueles pares que não são múltiplos de 3 são 206 e 208. Temos assim $210 \div 6 = 35$ blocos e, em cada um, dois números pares que não são múltiplos de 3, num total de $35 \times 2 = 70$ números.



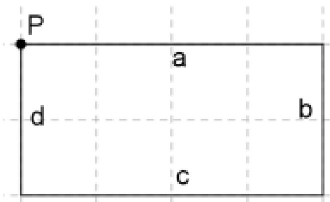

**c)** As partes **A**, **B** e **C** da figura ao lado correspondem às conclusões dos itens anteriores; sobram então $210 - (35 + 35 + 70) = 70$ cartões com números que não são nem pares nem múltiplos de 3, correspondendo à parte **D**. Escolhendo um número na parte **A**, outro na parte **B** (ou **C**) e 70 na parte **D**, vemos que é possível escolher 72 cartões tais quaisquer dois deles não tenham números que sejam simultaneamente pares ou múltiplos de 3. Por outro lado, ao escolher 73 cartões, os números de pelo menos três deles devem ficar fora da parte **D**, ou seja, nas partes **A**, **B** e **C**. Se dois desses números ficam na mesma parte eles têm 2 ou 3 (ou mesmo ambos, no caso de ficarem na parte **A**) como divisor comum; caso contrário, temos um na parte **A** e outro na parte **B** (ou **C**) que têm 3 (ou 2) como divisor comum. Logo Catarina deve pegar 73 cartões.

## QUESTÃO 5

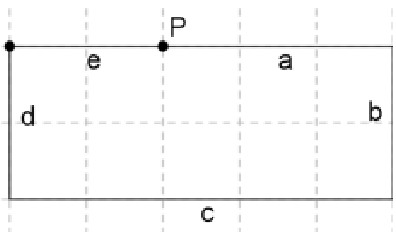



a) A assinatura geométrica de 123456 aparece na figura ao lado.

b) Seja *abcd* um número com quatro algarismos *a*, *b*, *c* e *d* não nulos. A assinatura geométrica de *abcd* possui quatro segmentos consecutivos de comprimentos *a*, *b*, *c* e *d*, traçados de acordo com o enunciado. Ela será fechada se e somente se esses traços formarem um retângulo, ou seja, se e somente se $a = c$ e $b = d$. Temos as escolhas de 1 a 9 para $a = c$ e também para $b = d$, num total de $9 \times 9 = 81$ escolhas; segue que temos 81 números de quatro algarismos cuja assinatura geométrica é fechada.




c) Seja *abcde* um número com cinco algarismos *a*, *b*, *c*, *d* e *e* não nulos. Como no item anterior, a assinatura geométrica de *abcde* será fechada se e somente os segmentos de comprimento *a*, *b*, *c*, *d* e *e* formarem um retângulo como na figura ao lado, ou seja, se e somente se $a + e = c$ e $b = d$. Como no item anterior, temos as escolhas de 1 a 9 para $b = d$.



Vamos agora contar de quantas maneiras é possível escolher *a*, *c* e *e* de modo que $a+e=c$. Exceto para o caso $c=1$, quando não há valores possíveis para *a* e *e*, podemos escolher valores de 1 até $c-1$ para *a* e, em cada caso, o valor de *e* fica determinado como $c-a$. Em outras palavras, para cada *c* é possível escolher *a* e *e* tais que $a+e=c$ de $c-1$ maneiras diferentes (notamos que no caso $c=1$ temos $c-1=0$). Como *c* varia de 1 a 9, o número de escolhas possíveis para *a* e *e* é $0+1+2+3+4+5+6+7+8=36$.

Finalmente, segue do princípio multiplicativo que temos $9\times 36=324$ números de cinco algarismos cuja assinatura geométrica é fechada.

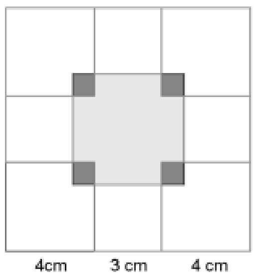
**QUESTÃO 6**

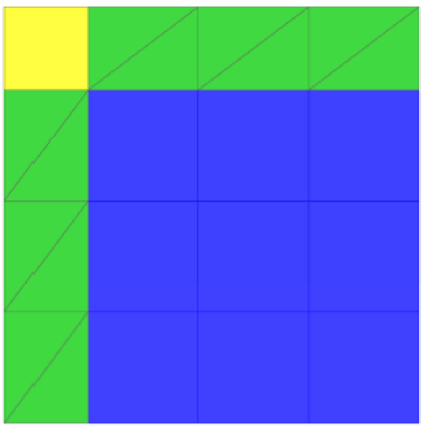
Cada uma das peças amarelas tem área $3\times 3=9$ cm$^2$, as azuis têm $4\times 4=16$ cm$^2$ e as verdes têm $\frac{3\times 4}{2}=6$ cm$^2$.

a) O hexágono montado por Dafne é composto por duas peças verdes, uma amarela e uma azul. Portanto, sua área é igual a $2\times 6+9+16=37$ cm$^2$.

b) A figura construída forma um quadrado de lado $4+3+4=11$ cm, cuja área é $11\times 11=121$ cm$^2$. Ele é composto de 4 amarelas e 4 peças azuis; a área total dessas peças é $4\times 9+4\times 16=100$ cm$^2$. A área do buraco é a área do quadrado menos a soma das áreas dessas peças, ou seja, é igual a $121-100=21$ cm$^2$.

Alternativamente, podemos pensar no buraco (em cinza claro) como um quadrado de 5 cm de lado do qual foram retirados, nos cantos, quadradinhos de lado 1 cm (em cinza escuro); sua área é então $5\times 5-4\times 1\times 1=21$ cm$^2$.



c) Uma possível maneira de preencher o quadrado $15\times 15$, como pedido, é mostrado na figura ao lado.

d) Um quadrado de lado 15 cm tem $15\times 15=225$ cm$^2$; observamos que 225 é um número ímpar. A peça azul tem área 16 cm$^2$ e a verde tem área 6 cm$^2$, ambos números pares. Logo não é possível preencher o quadrado de lado 15 cm apenas com peças desse tipo, pois a soma de números pares é par. Segue que para preencher o quadrado de lado 15 cm com as peças do enunciado é necessário usar pelo menos uma peça amarela.